



EXTRAIT DU FAKHRÎ,

PRÉCÉDÉ

D'UN MÉMOIRE SUR L'ALGÈBRE INDÉTERMINÉE

CHEZ LES ARABES.

كتاب فى الجبر والمقابلة وهو المعروف بالفخرى
للشيخ العلامة ابى بكر محمد بن الحسن الكرجى

EXTRAIT DU FAKHRÎ,

TRAITÉ D'ALGÈBRE

PAR ABOÛ BEKR MOHAMMED BEN ALHAÇAN ALKARKHÎ

(MANUSCRIT 952, SUPPLÉMENT ARABE DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE);

PRÉCÉDÉ

D'UN MÉMOIRE SUR L'ALGÈBRE INDÉTERMINÉE

CHEZ LES ARABES,

PAR F. WOEPCKE.



PARIS.

IMPRIMÉ, PAR AUTORISATION DE L'EMPEREUR,

A L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

M DCCC LIII.

A SON EXCELLENCE

LE BARON ALEXANDRE DE HUMBOLDT,

HOMMAGE

DE RESPECT ET DE RECONNAISSANCE

DE L'AUTEUR.

14 septembre 1853.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTICE SUR LE FAKHRÎ.

L'histoire des mathématiques chez les Arabes est une des parties les plus curieuses et les plus obscures de l'histoire générale des sciences exactes. Les Arabes ont été, dans les sciences, les élèves et en partie les héritiers des Indiens et des Grecs, et ont transmis, à leur tour, le dépôt qu'ils avaient reçu, à l'Europe moderne, après l'avoir augmenté par leurs propres travaux. Ce n'est que par l'étude attentive des ouvrages des mathématiciens arabes de différentes époques, que nous pouvons nous rendre un compte exact de ce qu'ils ont emprunté à l'Inde ou à la Grèce, de ce qu'ils y ont ajouté eux-mêmes, et de l'état dans lequel les Européens ont reçu d'eux la science.

Ces études n'ont encore été faites que très-partiellement, quoiqu'il ait paru récemment des travaux considérables, surtout sur l'astronomie arabe. Mais les mathématiques proprement dites, et notamment l'algèbre des Arabes, laissent encore un vaste champ aux recherches des savants.

On avait publié à Calcutta, en 1812, le *Khilâcet Alhiçâb*[*] de Behâ Eddîn (+ 1622); mais ce traité ne peut donner aucune idée des progrès que les Arabes ont faits en algèbre.

[*] « The *Khoolasut-ool-Hisab*, a Compendium of Arithmetic and Geometry, in the arabic language, by Buhae-ood-Deen of Amool in Syria, with a translation into persian and commentary, by the late Muolowee Ruoshun Ulee of Juonpoor, to which is added a Treatise on Algebra by Nudjm-ood-Deen Ulee Khan, etc. » (Calcutta, printed by P. Pereira at the hindoostanee press, 1812.)

Plus tard, M. Rosen publia à Londres l'Algèbre de Mohammed Ben Moûçâ*. Il démontra que cet ouvrage, écrit à l'invitation du khalife Almâmoûn, porte des traces évidentes d'une influence indienne, influence qui s'explique par la réputation dont les savants indiens jouissaient à la cour des premiers Abassides comme astronomes, mathématiciens et médecins.

Cette publication donna un nouveau crédit à l'opinion généralement adoptée, que les Arabes n'avaient pas dépassé en algèbre les problèmes déterminés du premier et du second degré. Mais M. Sédillot découvrit à la Bibliothèque impériale un fragment de l'Algèbre d'Alkhayyâmi**, à l'aide duquel il put prouver que les Arabes s'étaient occupés aussi des équations déterminées du troisième degré.

J'ai publié récemment le traité complet d'Alkhayyâmî***, en y joignant des extraits tirés d'autres mathématiciens arabes. J'ai tâché de réunir dans ce petit ouvrage un ensemble de données sur la manière dont les Arabes traitaient les problèmes qui dépendent de l'intersection de deux coniques, et sur l'emploi qu'ils en ont fait pour la construction des équations déterminées du troisième et du quatrième degré.

Cependant, il restait une lacune importante à remplir; on manquait absolument de données authentiques sur l'Algèbre indéterminée des Arabes, au point qu'il paraissait douteux qu'ils se fussent jamais occupés de cette branche de la science. J'ai été assez heureux pour découvrir à la Bibliothèque impériale un manuscrit, dont le contenu me fournit le moyen de déterminer les progrès que les Arabes avaient faits à la fin du xe siècle, dans cette partie de l'algèbre.

J'ai cru le sujet assez important pour me décider à donner un extrait complet de l'ouvrage d'Alkarkhî, et à entrer dans une discussion

* *The Algebra of Mohammed ben Musa*, edited and translated by Frederic Rosen. (London, 1831.)

** Voir le *Nouveau Journal asiatique*, mai 1834 — *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale*, t. XIII, p. 130-136.

*** *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de ms. inédits, par F. Wœpcke. (Paris, 1851.)

détaillée de quelques points qui se rattachent aux questions qu'il a traitées. J'espère prouver dans ce mémoire les points suivants :

1° Que les Arabes connaissaient l'algèbre indéterminée;

2° Que leurs travaux sur ce sujet sont basés sur l'ouvrage de Diophante;

3° Qu'ils ont ajouté à l'algèbre de Diophante, tant en inventant de nouveaux procédés, qu'en se proposant des problèmes de degrés plus élevés;

4° Que jusqu'à la fin du x[e] siècle ils ont ignoré les méthodes d'analyse indéterminée qu'on trouve chez les Indiens;

5° Que les travaux de Fibonacci n'ont pas le degré d'originalité qu'on a été tenté de leur attribuer; mais qu'ils sont en grande partie empruntés aux Arabes, et particulièrement à Alkarkhî.

L'ouvrage que je vais analyser* a pour auteur Aboû Beqr Moham-

* Le manuscrit dont je me suis servi a été rapporté de l'expédition d'Égypte. La couleur brunie du papier ainsi que l'état usé et taché de certaines pages attestent un âge considérable. De nombreuses restaurations ont été faites sur les bords, notamment au haut des pages, où ces restaurations ont quelquefois empiété sur l'écriture. En ce cas, les lignes qui auraient été enlevées ont été restituées par une seconde main, dont on retrouve l'encre et l'écriture sur les feuillets 9 et 88, de même que sur les dix derniers feuillets du manuscrit, du 98[e] au 108[e]. Ces feuillets sont d'un papier plus neuf et remplacent évidemment des feuillets perdus du manuscrit original. Le restaurateur semble avoir relu le manuscrit entier, car on trouve en différents endroits des corrections marginales, de courtes gloses, des indications du contenu des chapitres, toutes de sa main. Dans la seconde partie du manuscrit, qui est formée par un recueil de problèmes, il a placé en marge, près du commencement de chaque problème des quatre premières sections, son numéro d'ordre. Enfin, on trouve des lignes et des passages marqués complétement de tous les signes de l'écriture : ceux-ci semblent avoir été ajoutés comme par distraction, pendant que le lecteur réfléchissait sur les théories proposées; car ce ne sont pas exactement les passages obscurs dont on aurait voulu faciliter ainsi l'intelligence.

L'écriture du copiste original, large et lisible, a cela de particulier, qu'approchant du caractère africain, le point du ڧ est placé sous la ligne. On trouve aussi de la main de ce copiste des corrections marginales, notamment des restitutions de passages omis dans le texte.

Malgré toutes ces corrections, il est resté encore des erreurs, quoique peu nombreuses : j'ai fait abstraction, dans mon analyse, de ces erreurs qu'il faut évidemment mettre sur le compte du copiste.

med Ben Alhaçan Alkarkhi*, et fut dédié par lui à Aboû Ghâlib Mohammed Ibn Khalaf, surnommé Fakhr Almoulq**, vizir du prince Bouïde Behâ Aldaoulah, fils du célèbre Adhad Aldaoulah***.

Ce traité, qui doit donc avoir été composé à peu près au commencement du XIe siècle de notre ère, nous offre d'abord la plus complète, ou plutôt la seule théorie du calcul algébrique chez les Arabes que nous connaissions jusqu'à présent; mais il devient beaucoup plus intéressant encore par un recueil de problèmes qui, en partie, forment presque une reproduction exacte de plusieurs livres de Diophante, et dont une autre partie se retrouve dans cet ouvrage de Fibonacci, qui le premier enseigna l'algèbre aux Occidentaux.

On savait, depuis longtemps, que l'ouvrage de Diophante avait été connu aux Arabes; qu'il avait été traduit et commenté par Aboûl Wafâ. On savait, d'un autre côté, que Léonard de Pise avait voyagé en Égypte et en Syrie, et qu'une partie plus ou moins grande des connaissances nouvelles contenues dans son Traité de l'Abacus devait avoir été puisée par l'auteur à des sources arabes.

Mais cela n'était connu qu'historiquement. On avait grandement regretté que l'ouvrage d'Aboûl Wafâ semblait manquer aux bibliothèques de l'Europe. On avait vivement discuté le degré d'originalité qu'on devait accorder aux travaux de Fibonacci.

Un ouvrage arabe, qui contient presque une traduction d'un livre

* L'ouvrage actuel, ainsi qu'un traité du même auteur qui avait pour titre الكافى فى الحساب, sont mentionnés par Hadji Khalfa, éd. de Fluegel, vol. IV, p. 388, et vol. V, p. 20. D'après Hadji Khalfa, Alkarkhî avait le surnom de Fakhr Eddîn, était vizir de Behâ Aldaoulah, et avait composé le *Fakhrî* pour ce prince. Mais ce dernier détail parait inexact.

** C'est probablement en honneur de ce vizir que l'ouvrage reçut le titre d'*Alfakhrî*.

*** Ibn Khallican, manuscrit de la Bibliothèque impériale, n° 702, suppl. ar. fol. 264 v°: ابو غالب محمد بن خلف الملقب فخر الملك وزير بهاء الدولة بن عضد الدولة ابن بويه ...... ومن اجله صنف ابو بكر محمد بن الحسن الحاسب الكرخى كتاب الفخرى فى الجبر والمقابلة وكتاب الكافى فى الحساب (Traduction anglaise de M. de Slane, volume III, page 283 sqq.) — Ce vizir mourut le vingt-septième de rabia premier de l'an 407 (septembre de l'an 1017 de notre ère). Voir aussi Abulfedæ *Annales muslemici*, éd. de Reiske et Adler, tom. III, p. 6 et 7.

entier de Diophante et des extraits considérables de deux autres, dans lequel on retrouve textuellement les énoncés d'un grand nombre de problèmes de Fibonacci et quelques-uns des procédés de résolution qu'on a considérés comme faisant particulièrement honneur au géomètre de Pise, cet ouvrage, dis-je, me semble avoir une certaine importance historique.

Cependant, ce n'est pas à ce seul titre que l'algèbre d'Alkarkhî doive nous intéresser. On ne connaît, jusqu'à présent, « aucun ouvrage arabe où des questions un peu élevées d'analyse indéterminée soient traitées* ». Or, l'ouvrage d'Alkarkhî contient plus de soixante problèmes d'algèbre indéterminée en dehors de ceux tirés de Diophante; et remarquons que ce sont en majeure partie des problèmes des degrés supérieurs jusqu'au neuvième inclusivement, tandis que l'auteur n'a pris de Diophante que des problèmes du second degré. Ajoutons que l'auteur donne une véritable théorie, quoique imparfaite, de la résolution des équations indéterminées du second degré; qu'il réunit, dans un chapitre à part, plusieurs des porismes les plus importants de l'analyse indéterminée du second degré; qu'on rencontre, dans son recueil de problèmes, diverses méthodes originales et ingénieuses pour résoudre les égalités doubles, et l'on accordera peut-être quelque attention à l'examen détaillé de ce traité auquel je procède.

L'ouvrage d'Alkarkhî est divisé en deux parties. La première partie contient la théorie du calcul algébrique, de l'algèbre déterminée et de l'algèbre indéterminée. La seconde partie est formée par un recueil de problèmes algébriques.

La première partie se compose d'une suite de chapitres que j'ai numérotés, afin de pouvoir les citer plus facilement. Les neuf premiers chapitres nous présentent pour la première fois une théorie complète du calcul algébrique chez les Arabes; car ce qu'on en trouve dans le traité de Mohammed Ben Moûçâ n'est qu'un commencement bien faible et bien incomplet en comparaison des développements qu'Alkarkhî donne à ce sujet. Et, d'un autre côté, les règles conte-

* Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, vol. II, p. 304.

nues dans la première partie de l'ouvrage de Behâ Eddîn ne se rapportent pas au calcul algébrique, mais à l'arithmétique vulgaire.

Les deux premiers chapitres traitent des puissances algébriques et de leurs valeurs réciproques, et rappellent respectivement les définitions 1, 4 et 3, 5, 7, 8 que Diophante a placées en tête de son ouvrage. Seulement Diophante, qui n'emploie les puissances que jusqu'à la 6[e] inclusivement, s'arrête à cette dernière, tandis qu'Alkarkhî, qui définit et discute encore les trois degrés suivants, fait réellement usage de ces puissances, jusqu'à la 8[e] dans les problèmes déterminés, et jusqu'à la 9[e] dans les problèmes indéterminés.

Les chapitres III-VIII traitent de la multiplication, de la division, du rapport, de l'extraction de la racine carrée, de l'addition et de la soustraction des expressions algébriques rationnelles, s'élevant toujours des expressions les plus simples à des expressions de plus en plus compliquées.

Les règles exprimées en termes algébriques que contiennent ces chapitres sont généralement suivies d'un exemple numérique servant moitié de preuve et moitié d'explication. Souvent l'exposé de cet exemple numérique est entremêlé de raisonnements qui approchent quelquefois d'une démonstration de la règle. Mais, en général, l'auteur ne donne que rarement des démonstrations, et, s'il en donne, il se borne à les ébaucher et à faire ressortir seulement les points essentiels sur lesquels repose le théorème. Il dit même expressément qu'il a adopté à dessein ce mode de rédaction*; et, en plusieurs en-

* Par exemple, fol. 29 v°: وقد شرطت فى هذا الكتاب بعريته من البراهين والشرح الطويل والامثلة الكثيرة ومع ذلك فلا بدّ من ذكر البرهان على المسائل المقترنة وذكر علة تصنيف الاجذار وما يتعلق بها مختصرا موجزا

« Je me suis fait une loi, dans cet ouvrage, d'en bannir les démonstrations, et les longues explications, et les exemples nombreux; mais, malgré cela, je ne peux pas me passer d'un exposé succinct et abrégé de la démonstration des problèmes composés (du second degré) et de la raison pourquoi on prend la moitié (du coefficient) des racines, et des opérations qui s'y rattachent. »

Je fais remarquer à cette occasion que برهان signifie, chez les algébristes arabes plus spécialement, une démonstration au moyen d'une construction géométrique, et que شرح « explication » correspond ici à ce que nous appellerions une démonstration algébrique ou arithmétique.

droits, il renvoie, pour des explications ultérieures et détaillées, à un commentaire dont il se proposait d'accompagner l'ouvrage actuel. D'un autre côté, l'auteur fait souvent observer qu'on doit être préparé à l'intelligence des règles du calcul algébrique (حساب المجهولات) par les règles de l'arithmétique vulgaire (حساب المعلومات) qu'il dit avoir enseignées dans une première partie (المقالة الاولى) de son ouvrage. Il y a lieu de croire que cette première partie était formée par le *Qâfî fil Hiçâb*, ouvrage du même auteur, qui est mentionné par Ibn Khallican et Hadji Khalfa.

Dans le IXe chapitre on trouve les règles qui se rapportent au calcul des racines de différents degrés. Ce chapitre, ainsi que le chapitre suivant, qui contient la sommation d'un certain nombre de suites, fixeront sans doute l'attention du lecteur. Si l'auteur abandonne dans ces deux chapitres les expressions générales et n'opère que sur des nombres donnés, cela ne tient pas à ce que ses méthodes soient ici moins générales que dans les chapitres précédents, mais à ce que la forme parlée de l'algèbre arabe l'aurait obligé à des circonlocutions et à des tournures compliquées qui auraient nui à la clarté. Il donne donc à ces théorèmes une forme spéciale qui, cependant, permet parfaitement de voir comment le théorème s'applique à un autre cas quelconque.

Dans le XIe chapitre, l'auteur a réuni une suite de théorèmes qui sont plus tard d'un usage fréquent, surtout dans la résolution des problèmes indéterminés, mais quelques-uns aussi dans la discussion des problèmes déterminés. Le plus remarquable de ces théorèmes est sans doute la formule sur laquelle repose la résolution de l'égalité double, selon la manière de Diophante, et que l'auteur a placée en tête de ce chapitre.

Les chapitres XII et XIII contiennent la résolution des équations déterminées des deux premiers degrés et des équations dérivatives du second degré. Outre l'explication que l'auteur donne des deux mots جبر et مقابلة, et qui s'éloigne un peu des significations que les algébristes arabes assignent ordinairement à ces deux termes, on remarquera ici que l'auteur, de même qu'Omar Alkhayyâmî, fonde les démonstrations géométriques de la résolution des équations trinômes du second de-

gré sur les propositions connues du second livre des Éléments d'Euclide; on remarquera aussi la construction géométrique, non pas de la valeur de l'inconnue, mais de son carré, construction qu'on ne trouve dans aucun des autres traités arabes d'algèbre connus jusqu'à présent. Mais je pense que surtout on ne lira pas sans intérêt ce que l'auteur dit au sujet des équations dérivatives. C'est pourquoi j'ai donné presque une traduction textuelle du XIII[e] chapitre, dans l'extrait du manuscrit entier que je fais suivre ci-dessous.

Par les mêmes raisons, j'ai reproduit de la même manière la théorie de la résolution de l'équation indéterminée $ax^2+bx+c=y^2$, qui forme le sujet du XIV[e] chapitre. Cette théorie est telle qu'elle devait résulter d'une étude approfondie de l'ouvrage de Diophante. Tout au moins, l'auteur aurait donc le mérite d'avoir présenté sous leur forme générale ces théorèmes que la pratique de Diophante ne donnait qu'implicitement. Mais l'auteur a fait davantage. Tandis que dans ce chapitre théorique il déclare encore comme une condition nécessaire de la solubilité de l'équation $ax^2+bx+c=y^2$, que a ou c doivent être des carrés positifs, nous le verrons résoudre, dans son recueil de problèmes, des équations de la forme $\pm(bx-c)-x^2=y^2$, et énoncer la condition $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp c = x_1^2+y_1^2$ *. D'ailleurs, l'auteur déclare exprès, à la

* Diophante résout une seule équation de ce genre; c'est l'équation $3x+18-x^2=y^2$, à laquelle il ramène le 33[e] problème du IV[e] livre. Mais, de la manière dont il s'y prend, il ne résulte nullement que Diophante ait connu la condition de la solubilité à laquelle les coefficients de l'équation particulière dont il s'agit satisfont par hasard. Les théorèmes relatifs à la solubilité, énoncés formellement par Diophante, ne se rapportent qu'à la forme $ax^2 \pm c = y^2$. C'est d'abord que, si la somme $a+c$ est égale à un nombre carré y_1^2, on peut trouver une infinité de valeurs de x satisfaisant à l'équation $ax^2+c=y^2$ (VI, 12, Lemme). La solution de Diophante nous donne :

$$x = 1 + 2\,\frac{a \pm dy_1}{d^2-a},$$

d étant un nombre entier quelconque. Puis, Diophante énonce (VI, 16) que, si l'on a $ax_1^2-c=y_1^2$, on trouvera toujours une valeur $x>x_1$ satisfaisant à l'équation $ax^2-c=y^2$. Diophante obtient

$$x = x_1 + 2\,\frac{ax_1+dy_1}{d^2-a}.$$

Enfin, on trouve chez Diophante (VI, 15), la condition de la solubilité de l'équation $ax^2-c=y^2$, connue aussi aux Indiens (voir ci-dessous, p. 36), que a doit être égal à la somme de deux carrés.

fin de ce chapitre, qu'il n'avait pas l'intention de donner en cet endroit une théorie complète de l'analyse indéterminée, qu'il réservait à son commentaire des développements ultérieurs concernant les équations indéterminées des degrés supérieurs, et qu'il avait écrit un ouvrage à part qui traitait d'une manière détaillée de l'analyse indéterminée. Les parties de son recueil de problèmes qui se rapportent à cette matière, et que je soumettrai plus loin à un examen spécial, doivent faire regretter que les ouvrages auxquels l'auteur fait allusion ne nous soient pas parvenus.

Le xve chapitre, qui termine la partie théorique, a pour objet la recherche d'un facteur qui, multiplié par une expression donnée de la forme $a \pm \sqrt{b}$, produise l'unité. Ce problème sert à l'auteur dans la résolution des équations du second degré à coefficients irrationnels et des équations dérivatives, lorsque le terme le plus élevé de l'équation se présente sous la forme $ax^m + \sqrt{bx^{2m}}$.

Passons maintenant à l'examen du recueil de problèmes qui forme la seconde partie de l'ouvrage d'Alkarkhî.

Ce recueil est divisé en cinq sections, contenant respectivement 51, 50, 50, 60 et 43, en tout 254 problèmes. L'auteur ne s'est proposé, dans cet arrangement, que de s'élever graduellement à des problèmes de plus en plus difficiles; mais il a négligé l'ordre des matières*, de sorte qu'à l'exception de la dernière, aucune de ces sections ne contient exclusivement un genre déterminé de problèmes.

Je vais donc commencer par classer ces problèmes suivant le genre d'analyse auquel ils appartiennent, et suivant le degré des équations dont ils dépendent.

(1) PROBLÈMES DÉTERMINÉS.

(A) Du premier degré.

I, 1-12, 16-24, 32, 33, 35, 38-51.
II, 3, 5, 7, 8, 12-18, 20, 35, 45-48.

* On trouve même quelques problèmes deux fois (voir II, 40 et IV, 15; II, 50 et IV, 1; II, 28 et IV, 27). D'ailleurs, la même chose est arrivée aussi à Mohammed Ben Moûçâ. (Voir, édit. de Rosen, p. 50 et 63, 62 et 64.)

III, 5, 7, 9, 20, 22, 24, 25, 28-32, 46-49.
IV, 17, 18, 40.

(B) Dépendant de l'équation binôme du second degré.

I, 13-15, 37.

(C) Dépendant d'une équation trinôme du second degré.

I, 36.
II, 1, 2, 4, 6, 9, 11, 19, 34, 36-44, 49.
III, 8, 10-19, 21, 23.
IV, 15, 16.

(D) Dépendant d'équations de degrés supérieurs, dérivatives du second degré.

IV, 19-26.

(2) PROBLÈMES SEMI-DÉTERMINÉS *.

V, 16-20, 43.

(3) PROBLÈMES INDÉTERMINÉS.

(A) Du premier degré **.

I, 25-31, 34.
II, 10, 21.
III, 6, 26, 27, 33-35.

(B) Du second degré.

II, 22-33, 50.
III, 1-4, 36-45, 50.
IV, 1-14, 27-39, 41-60.

(C) De degrés supérieurs.

V, 1-15, 21-42.

* Je désigne ici par ce nom des problèmes déterminés, mais soumis à la condition d'être résolus en nombres rationnels.

** En vérité, ce ne sont que les énoncés de ces problèmes qui soient indéterminés; l'auteur rend ces problèmes tout de suite déterminés, en choisissant arbitrairement la valeur d'une ou de plusieurs inconnues. Cependant il fait ressortir, dans la plupart des cas, ce qu'il y a d'arbitraire dans la solution donnée. Comme Diophante, auquel plusieurs de ces problèmes sont empruntés, l'auteur n'exclut pas des valeurs fractionnaires. Il ne s'agit donc pas ici d'une méthode semblable à celle des Indiens ou des modernes, pour la résolution des équations indéterminées du 1[er] degré.

Aussi bien que Diophante, Alkarkhî résout des problèmes renfermant plusieurs et jusqu'à six inconnues; une grande partie de ces problèmes sont même tirés de l'ouvrage de Diophante, ainsi que je le montrerai plus loin. Mais Diophante n'a qu'un seul symbole pour désigner l'inconnue, ce qui l'oblige à suppléer par le choix ingénieux des inconnues, par une séparation habile des différentes parties du problème, et surtout par la supériorité de son génie, à la défectuosité de son algorithme qui, à cet égard, est resté non-seulement au-dessous de celui des modernes, mais aussi de celui des Indiens.

Or, c'est ici que je dois signaler un fait extrêmement curieux, à savoir qu'Alkarkhî, dans deux de ses problèmes, fait usage d'un terme spécial pour désigner une seconde inconnue, dont il se sert dans la résolution du problème, absolument comme nous calculons avec x et y*. Cependant, l'auteur ne se sert pas du même terme dans les deux problèmes pour désigner la seconde inconnue, et n'emploie ce procédé que cette seule fois. Cela nous prouve que nous avons ici affaire à un de ces premiers pas dans le chemin d'une découverte importante, que malheureusement il n'a pas été permis à la science arabe de poursuivre jusqu'au bout. Mais cela nous prouve aussi que ce n'était ni la profondeur, ni l'esprit d'invention, mais uniquement le temps qui manquait aux géomètres arabes pour mériter toute l'admiration de la postérité.

Comme tous les algébristes arabes, Alkarkhî n'admet pas des valeurs négatives** de l'inconnue. C'est ainsi qu'il déclare absurdes les problèmes I, 38; II, 38, 46, dont les énoncés conduisent à une valeur négative de l'inconnue, et dont il modifie ensuite les constantes pour rendre ces problèmes *résolubles*. De même la détermination que, d'après Diophante, il ajoute au problème III, 25, n'a d'autre but que d'empêcher un résultat négatif. Ce qui est plus remarquable, c'est que l'auteur exclut aussi la valeur zéro, ainsi qu'on peut le voir dans les problèmes I, 33, 34.

* J'ai donné, dans l'addition I, le texte et la traduction de ces deux problèmes.

** Ni, à plus forte raison, des valeurs imaginaires.

Dans les problèmes indéterminés, l'auteur admet, comme Diophante, des solutions fractionnaires, et n'exclut que les solutions irrationnelles.

La théorie de la résolution des équations déterminées, tant du second degré que des équations dérivatives, est traitée par l'auteur dans la première partie de son ouvrage, aussi complétement qu'on peut le désirer. Il n'en est pas de même pour les équations indéterminées; je vais donc suppléer à ce défaut par un examen détaillé de tous les problèmes indéterminés de son recueil qui ne sont pas tirés de l'ouvrage de Diophante. Cet examen formera en même temps un aperçu de l'état de l'analyse indéterminée chez les Arabes au commencement du XI[e] siècle.

Voici d'abord l'analyse des problèmes, n'appartenant pas à Diophante, qui se trouvent dans les sections II, III et IV.

(1) Les problèmes II, 22-27 et 33 n'offrent rien de remarquable. L'auteur fait simplement usage, pour leur résolution, de la méthode qu'il a exposée dans le XIV[e] chapitre de la première partie.

(2) $a \mp x = y^2, \quad a' \mp x = z^2.$ (II, 29, 31; IV, 29, 31.)

On a $$y^2 + (a' - a) = z^2,$$

et en posant $$z = y \pm m,$$

on obtient $$y = \frac{a' - a - m^2}{\pm 2m}.$$

Le problème II, 30, qui est d'une forme un peu différente, à savoir :

$$a - x^2 = y^2, \qquad a' - x^2 = z^2,$$

conduit également à l'équation

$$y^2 + (a' - a) = z^2.$$

(3) $a + x = y^2, \quad a' - x = z^2.$ (IV, 30.)

Ce problème se ramène immédiatement à l'équation

$$y^2 + z^2 = a' + a.$$

* Comparer d'ailleurs, relativement à l'originalité de ce procédé, ci-dessous, p. 20, l. 5-10; et p. 42, l. 9.

(4) $x^2 + bx = y^2, \qquad \pm x^2 + b'x = z^2.$ (II, 28; 32; IV, 27, 28.)

L'auteur résout d'abord

$$x_1^2 + by_1 = v^2, \qquad \pm x_1^2 + b'y_1 = w^2;$$

il pose, pour cet effet, $by_1 = 2mx_1 + m^2,$

ce qui donne $v^2 = (x_1 + m)^2,$

$$w^2 = \pm x_1^2 + \frac{b'}{b} 2mx_1 + \frac{b'}{b} m^2.$$

Cette dernière équation peut toujours être résolue lorsque x_1^2 est affecté du signe positif. Dans les exemples où x_1^2 est affecté du signe négatif,

on a $\frac{b'}{b} = n^2,$

et, dans ce cas, l'équation se laisse également résoudre. Ayant ainsi trouvé des valeurs x_1, y_1 qui satisfont aux équations

$$x_1^2 + by_1 = v^2, \qquad \pm x_1^2 + b'y_1 = w^2,$$

on multiplie celles-ci par $\frac{x_1^2}{y_1^2},$

et l'on obtient $\left(\frac{x_1^2}{y_1}\right)^2 + b\frac{x_1^2}{y_1} = \frac{v^2 x_1^2}{y_1^2}, \qquad \pm\left(\frac{x_1^2}{y_1}\right)^2 + b'\frac{x_1^2}{y_1} = \frac{w^2 x_1^2}{y_1^2},$

donc $x = \frac{x_1^2}{y_1}.$

(5) $x^2 + y^2 = z^2.$ (III, 3.)

L'auteur pose $y = x + 1, \qquad z = nx - 1,$

ce qui donne $x = \frac{2(n+1)}{n^2-2}, \qquad y = \frac{(n+1)^2-1}{n^2-2}, \qquad z = \frac{(n+1)^2+1}{n^2-2}.$

En supprimant le dénominateur, on obtient la formule de Platon (ou, d'après Boèce, d'Archytas) pour la construction du triangle rectangle en nombres entiers. Je fais remarquer, à cette occasion, que l'auteur ne se propose qu'une résolution en nombres rationnels, tandis que les formules de Pythagore, de Platon, d'Euclide (*Éléments*, X, 29, lemme 1) et de Fibonacci ont pour but la construction du triangle rectangle en nombres entiers*.

* Diophante, qui dans tout le VIe livre ne s'occupe que de problèmes relatifs au triangle rectangle ayant pour côtés des nombres rationnels, y emploie constam-

(6) Les problèmes III, 4 et III, 39 ne donnent pas lieu, en ce qui concerne la méthode de la résolution, à des remarques particulières. Ils portent entièrement le cachet qui caractérise tant les énoncés que les résolutions de Diophante, et je serais très-porté à croire que ces deux problèmes appartiennent réellement à l'algébriste grec, et font partie des pertes que le texte de Diophante, que nous possédons, a éprouvées dans la suite du temps. Le problème III, 50, qui a pour but la construction de deux triangles rectangles rationnels et ayant la même hypoténuse $x^2+y^2=u^2$, et $z^2+t^2=u^2$, prête à la critique, par la manière dont l'auteur construit le premier triangle. Il pose $y=x+n$, et u « égal à un nombre donné quelconque » m. On aura conséquemment

$$2x^2+2nx+n^2=m^2,$$

et

$$x=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2m^2-n^2}-n\right\}.$$

Il faut donc choisir m et n de sorte que $2m^2-n^2$ soit un nombre carré, ce que l'auteur oublie de faire remarquer. D'ailleurs, ce problème n'est qu'une combinaison des problèmes III, 3 et III, 37, et se retrouve considérablement généralisé dans IV, 60.

(7) $$\pm(ax-b)-x^2=y^2. \qquad \text{(IV, 32, 33.)}$$

On a $$x=\pm\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2\mp b\right\}-y^2}.$$

L'auteur énonce maintenant, comme condition de la solubilité du problème, que $\left(\frac{a}{2}\right)^2\mp b$ doit être la somme de deux carrés y^2+z^2; en ce cas, on aura

$$x=\pm\frac{a}{2}\pm z.$$

(8) $$a^2x^2+bx+c=y^2, \qquad a^2x^2+b'x+c'=z^2. \qquad \text{(IV, 34-39.)}$$

Alkarkhî pose $$z=\pm\sqrt{a^2x^2+bx+c}\pm m,$$

ce qui donne $a^2x^2+b'x+c'=a^2x^2+bx+(c+m^2)\pm\sqrt{4a^2m^2x^2+4bm^2x+4cm^2}$,

ment le procédé suivant : il forme le triangle rectangle $x^2+y^2=z^2$ des nombres α et β, en posant $x=\alpha^2-\beta^2$, $y=2\alpha\beta$, $z=\alpha^2+\beta^2$. C'est le cas particulier de la formule d'Euclide et de Fibonacci (voir ci-dessous, p. 30, dernière note) qu'on obtient en posant $\mu=2$.

donc $$4a^2m^2x^2 + 4bm^2x + 4cm^2 = [(b'-b)x + (c'-c-m^2)]^2$$
$$= (b'-b)^2x^2 + 2(b'-b)(c'-c-m^2)x + (c'-c-m^2)^2;$$

en prenant maintenant $$m = \frac{b'-b}{2a},$$

on obtient $$x = \frac{\left[c'-c-\left(\frac{b'-b}{2a}\right)^2\right]^2 - 4c\left(\frac{b'-b}{2a}\right)^2}{4b\left(\frac{b'-b}{2a}\right)^2 - 2(b'-b)\left[c'-c-\left(\frac{b'-b}{2a}\right)^2\right]}.$$

Je passe maintenant à l'examen de la Ve section du recueil de problèmes qui a pour objet l'analyse d'équations indéterminées des degrés supérieurs, et qui paraît être d'origine purement arabe.

(1) $$x^a \pm y^a = z^{a\pm 1}. \quad \text{(V, 1-4.)}$$

On pose $$x = my, \qquad z = ny,$$

et l'on aura $$(m^a \pm 1)y^a = n^{a\pm 1}\cdot y^{a\pm 1},$$

donc $$\frac{m^a \pm 1}{n^{a+1}} = y \text{ ou } y = \frac{n^{a-1}}{m^a \pm 1}.$$

(2) $$x^a \cdot y^b = z^c. \quad \text{(V, 5-8.)}$$

En posant $$y = mx, \qquad z = nx^p,$$

on aura $$m^b \cdot x^{a+b-pc} = n^c.$$

Maintenant, si l'on peut faire $a+b-pc = \pm 1$, le problème est résolu :

on aura $$x = \frac{n^c}{m^b} \text{ ou } x = \frac{m^b}{n^c}.$$

Sinon, l'équation $x^a \cdot y^b = z^c$ est ramenée à la suivante :

$$x^{a+b-pc} \cdot y^b = z^c$$

qui, dans certains cas, sera plus facile à résoudre que $x^a \cdot y^b = z^c$ *.

* On voit qu'en répétant ce procédé μ fois, on obtiendra, comme exposant de x,

$$a + \mu b - (p + p_1 + p_2 + \ldots)c$$

où $p, p_1 p_2 \ldots$ ont des valeurs arbitraires. En définitive, la résolution de l'équation

$$x^a \cdot y^b = z^c$$

dépendra donc, d'après cette méthode, de la résolution de l'équation indéterminée du 1er degré

$$(a \pm 1) + bx_1 - cy_1 = 0,$$

où l'on prendra ensuite

$$\mu = x_1 \text{ et } p + p_1 + p_2 \ldots = y_1.$$

(3) $$x^{n+1} \pm bx^n = y^n. \quad \text{(V, 9, 10.)}$$

Posons
$$y = mx,$$
on obtient
$$x^{n+1} = (m^n \mp b)\, x^n, \qquad x = m^n \mp b.$$

(4) $$ax = y^2, \qquad bx = z^3. \quad \text{(V, 11-14.)}$$

On a
$$\frac{y^2}{a} = \frac{z^3}{b},$$
donc, en posant
$$y = mz,$$
$$z = \frac{b}{a} \cdot m^2.$$

(5) $$ax = z^3, \qquad by = z. \quad \text{(V, 15.)}$$

Posons
$$x = ny^2,$$
on aura
$$any^2 = b^3y^3,$$
donc
$$y = \frac{an}{b^3}.$$

Ou bien on posera simplement
$$x = \frac{m^3}{a}, \qquad y = \frac{m}{b}.$$

(6) Les problèmes V, 16-20 et 43 sont déterminés. Ils sont de la forme suivante :
$$ax^c = y^d, \qquad bx^c = y,$$
donc
$$x = \sqrt[c(d-1)]{\frac{a}{b^d}}.$$

Mais comme l'auteur désire avoir une solution en nombres entiers, il ajoute la condition
$$\frac{a}{b^d} = m^{c(d-1)}.$$

Le dernier de ces problèmes présente une solution en expressions générales, comme on en trouve aussi chez Diophante.

(7) $$x^a \pm f \cdot y^b = z^c. \quad \text{(V, 21-34.)}$$

Posons
$$y = mx^\alpha, \qquad z = nx^\beta;$$
on obtient
$$x^a \pm f \cdot m^b \cdot x^{\alpha b} = n^c \cdot x^{\beta c}.$$

Dans les problèmes 21-27, 29-34, on peut choisir p et q de telle sorte, que des trois quantités a, pb, qc, deux deviennent égales et plus grandes ou plus petites que la troisième, d'une unité, après quoi le problème est résolu. Dans le problème 28, on arrive à une équation de la forme $x^4+gx^2=z^2$; on pose $z=mx$, en choisissant m de telle sorte que $m^2-g=n^2$, et l'on a $x=n$.

(8) $$\pm x^3+ax^2=y^2, \qquad \pm x^3+a_1x^2=z^2.$$ (V, 37-40.)

On pose $$y=mx, \qquad z=nx;$$

il suit $$\pm x^3+ax^2=m^2x^2, \qquad \pm x^3+a_1x^2=n^2x^2;$$

donc $$x=\pm(m^2-a) \quad \text{ou} \quad x=\pm(n^2-a_1);$$

il faut donc choisir m et n de telle sorte qu'on ait

$$m^2-n^2=a-a_1.$$

Dans les deux premiers problèmes, l'auteur fait observer qu'on peut aussi résoudre ces problèmes en employant le procédé ordinaire de l'égalité double.

(9) $$x^a+y^{a-1}=z^2, \qquad \pm(x^a-y^{a-1})=t^2.$$ (V, 35*, 36, 41, 42.)

Posons $$x=px_1, \qquad y=qx_1,$$

ce qui donne $$p^ax_1^a+q^{a-1}x_1^{a-1}=z^2, \qquad \pm\{p^ax_1^a-q^{a-1}x_1^{a-1}\}=t^2.$$

Maintenant :

1° Si a est pair, on pose

$$z=mx_1^{\frac{a}{2}}, \qquad t=nx_1^{\frac{a}{2}},$$

et l'on a $$p^ax_1^a+q^{a-1}x_1^{a-1}=m^2x_1^a, \qquad \pm p^ax_1^a\mp q^{a-1}x_1^{a-1}=n^2x_1^a,$$

ou $$p^ax_1+q^{a-1}=m^2x_1, \qquad \pm p^ax_1\mp q^{a-1}=n^2x_1;$$

donc $$x_1=\frac{q^{a-1}}{m^2-p^a} \quad \text{ou} \quad x_1=\frac{\mp q^{a-1}}{n^2\mp p^a}=\frac{q^{a-1}}{p^a\mp n^2};$$

il faut donc choisir m et n de telle sorte qu'on ait

$$m^2-p^a=p^a\mp n^2,$$

c'est-à-dire $$2p^a=m^2\pm n^2.$$

* 35 est de cette forme; mais l'auteur le résout en posant $y=nx$, et en employant ensuite le procédé ordinaire de l'égalité double.

2° Si a est impair, on pose

$$z = mx_1^{\frac{a-1}{2}}, \qquad t = nx_1^{\frac{a-1}{2}},$$

et l'on a $p^a x_1^a + q^{a-1} x_1^{a-1} = m^2 x_1^{a-1}$, $\quad \pm p^a x_1^a \mp q^{a-1} x_1^{a-1} = n^2 x_1^{a-1}$;

donc $\quad x_1 = \frac{m^2 - q^{a-1}}{p^a}$ ou $x_1 = \frac{n^2 \pm q^{a-1}}{\pm p^a} = \frac{q^{a-1} \pm n^2}{p^a}$;

condition : $\quad 2q^{a-1} = m^2 \mp n^2$.

Voilà un aperçu succinct du contenu de cet ouvrage, contenu qui me semble devoir lui assigner une place honorable dans l'histoire du développement de la science, et contribuer, sous plusieurs rapports, à relever les Arabes du reproche de n'avoir pas su reculer les limites des connaissances qu'ils avaient reçues des Grecs.

Occupons nous maintenant de l'intérêt non moins considérable que ce traité nous offre, non comme ouvrage original, mais à cause des emprunts faits par Alkarkhî à Diophante, et par Fibonacci à Alkarkhî.

Je commencerai par passer en revue les problèmes des trois premiers livres de Diophante, en désignant pour chaque problème, ou chaque groupe de problèmes, les problèmes correspondants du recueil d'Alkarkhi, et en faisant remarquer l'identité ou la différence de l'original et de la reproduction.

Dans le premier livre de Diophante, les problèmes 2 et 3 correspondent aux problèmes I, 16, 19 d'Alkarkhi; les problèmes 4, 8, 9, 10, 12, à II, 45-48, et III, 7 respectivement. Toutefois, les problèmes d'Alkarkhi diffèrent, dans les valeurs données aux constantes, de ceux de Diophante; en partie, ces problèmes sont si simples et se présentent si naturellement à l'esprit, qu'on ne peut pas considérer comme démontré qu'Alkarkhî les ait pris dans Diophante. Cela est encore plus le cas pour les problèmes 11, qui offre quelque analogie avec I, 35 d'Alkarkhî, et 15, dont III, 5 d'Alkarkhî présente une forme, étendue à un plus grand nombre d'inconnues.

Quant aux problèmes 13, 16-28 et 43, c'est bien différent. On les retrouve dans les problèmes III, 20, 24, 25, 29-32, 34, 35, 26,

27, 28 d'Alkarkhî (en laissant de côté les propositions 19, 21, 23 de Diophante, qui ne contiennent que d'autres solutions des problèmes 18, 20, 24). Quoique dans quelques-uns de ces problèmes Alkarkhî ait changé les constantes de Diophante, que quelquefois il ne choisisse pas la même inconnue comme celle au moyen de laquelle les autres inconnues du problème sont exprimées, quoique enfin Alkarkhî suive dans l'une ou l'autre de ses solutions un procédé un peu différent, qu'il ne reproduise pas toujours toutes les méthodes différentes proposées par Diophante, ou qu'il ajoute à celles-ci des méthodes de sa propre invention, je dis : malgré les différences que je viens d'indiquer, la conformité du reste est tellement grande, qu'il n'est pas permis de douter qu'Alkarkhî n'ait réellement emprunté ces problèmes à l'ouvrage de Diophante.

Quant aux problèmes 31, 32, 33 dont les énoncés sont essentiellement conformes à ceux des problèmes III, 8, 9 et I, 36 d'Alkarkhî, celui-ci a emprunté les deux premiers, non pas à Diophante, mais à Mohammed Ben Moûçâ, chez lequel on les retrouve à peu près textuellement *; aussi, le procédé suivi par Alkarkhî, dans la solution de ces deux problèmes, est-il essentiellement différent de celui de Diophante. La différence entre Diophante, I, 33, et Alkarkhî, I, 36, est encore plus grande; car Alkarkhî arrive à une valeur irrationnelle de l'inconnue, ce qui est entièrement contraire, même au caractère des problèmes déterminés de Diophante; aussi ne trouve-t-on pas chez Alkarkhî la condition que Diophante place au commencement de ce problème, afin d'empêcher un résultat irrationnel.

Les problèmes qu'on vient d'énumérer sont, à deux exceptions près **,

* Voir l'édition de Rosen, p. 39, 42. Outre ces deux problèmes, Alkarkhî a encore emprunté à Mohammed Ben Moûçâ les problèmes III, 10, 22 (éd. de Rosen, p. 44 et 65); mais dans la résolution du premier de ces deux derniers problèmes, il ajoute d'autres méthodes à celle de Mohammed Ben Moûçâ, et dans la résolution du second, il emploie un raisonnement différent.

** A savoir, les problèmes I, 36; III, 8 d'Alkarkhî. Quant aux problèmes III, 26, 27, 34, 35 qui, d'après leurs énoncés, seraient indéterminés, il en a été question ci-dessus (p. 10, 2ᵉ note).

déterminés et du premier degré*. Passons maintenant aux problèmes indéterminés du second degré qu'Alkarkhî a empruntés au SECOND LIVRE de Diophante. Les problèmes 8 (dont 9 n'est qu'une seconde solution peu différente de la première) 10 et 11 se retrouvent avec des constantes changées dans III, 36-38 d'Alkarkhî. Le problème III, 40 de celui-ci ne reproduit que la première méthode de résolution de II, 12 de Diophante; mais on trouve la seconde employée dans II, 31 et IV, 31 d'Alkarkhî. III, 41 d'Alkarkhî n'a de commun avec II, 13 de Diophante que l'énoncé; mais la méthode suivie par Diophante, dans ce problème, a servi à Alkarkhî pour les problèmes II, 29 et IV, 29. Au contraire, III, 42 d'Alkarkhî ne diffère de II, 14 de Diophante que par les constantes, et présente les deux méthodes de Diophante. II, 15-17 de celui-ci sont presque textuellement reproduits dans III, 43-45 d'Alkarkhî.

Bachet a déjà fait observer que la solution du problème II, 19 de Diophante n'est réellement qu'un ἄλλως de II, 18, et qu'elle est étrangère à l'énoncé du problème II, 19; or, l'énoncé de ce problème est conforme (abstraction faite des constantes) à celui de IV, 40 d'Alkarkhî, qui résout ce problème par la méthode des deux fausses positions. Si maintenant on voulait penser qu'Alkarkhî ait tiré ce problème d'une rédaction moins mutilée de l'ouvrage de Diophante que ne l'est celle que nous possédons actuellement, il serait pourtant difficile de croire que Diophante se soit servi de la méthode des deux fausses positions. Quoi qu'il en soit, toujours est-il surprenant de voir ce problème, dans le recueil d'Alkarkhî, suivi par un problème (IV, 41) qui ne diffère que dans le choix des constantes de II, 20 de Diophante. Cette circonstance ne favorise pas l'opinion émise par Bachet, que les problèmes II, 18, 19 de Diophante aient été originairement placés après la 25e (ou plutôt la 26e) proposition du premier livre. Du moins, il paraît assez probable que les problèmes II, 19 et 20 se suivaient dans la rédaction qu'Alkarkhî avait sous les yeux. Peut-être cette rédaction

* Remarquons qu'Alkarkhî omet les énoncés généraux que Diophante a placés en tête de la plupart de ces problèmes.

était-elle déjà presque aussi mutilée que la nôtre, et le géomètre arabe, voyant bien que la solution qui suivait l'énoncé du problème II, 19 ne s'y rapportait aucunement, en donna la solution à sa propre manière, en y employant la règle des deux fausses positions.

Tout le reste des problèmes du second livre, du 21e au 36e, est fidèlement reproduit dans les problèmes III, 1, 2 et IV, 1-14 d'Alkarkhî, si ce n'est que le problème IV, 4 (II. 26 de Diophante) présente un léger changement des constantes.

Enfin, les problèmes IV, 42-60 d'Alkarkhi sont des reproductions exactes de tous les problèmes du TROISIÈME LIVRE de Diophante, en en exceptant seulement le 4e, le 8e et le 18e, dont les deux derniers ne sont que des secondes solutions des problèmes 7 et 17. Dans cette suite de problèmes, Alkarkhi ne s'est éloigné de son original que par le choix d'une constante dans les problèmes 10 et 11, et en supprimant, dans les problèmes 12 et 13, ces essais de solution que Diophante ne propose que pour les rejeter, et pour montrer qu'une certaine méthode ne peut pas servir dans ces cas. L'ordre des trois derniers problèmes est interverti dans le manuscrit arabe, et le procédé employé pour résoudre III, 24 de Diophante y présente de légères différences qui, cependant, sont à l'avantage de l'auteur arabe.

Il résulte de l'examen précédent :

D'un côté, que plus d'un tiers des problèmes du premier livre de Diophante, les problèmes du second livre, à partir du 8e, et les problèmes du troisième livre presque intégralement, ont été insérés par Alkarkhî dans son recueil;

De l'autre côté, que les problèmes 24-45* de la IIIe section, et les problèmes 1-14 et 40-60 de la IVe section du recueil arabe, sont tirés de l'ouvrage de Diophante**.

* Il faut excepter les problèmes III, 33 et 39 d'Alkarkhî, qui ne se trouvent pas dans l'ouvrage de Diophante, du moins pas dans ce que nous en possédons aujourd'hui. Cependant, ces problèmes portent tous les deux le cachet particulier aux énoncés et aux solutions de l'algébriste grec.

** Je fais abstraction, dans ce résumé, de quelques autres problèmes épars dans

Ajoutons que l'ordre de ces problèmes est, en majeure partie, le même dans les deux ouvrages.

Ce fait curieux qui nous intéresse surtout sous le rapport de l'importance que doit avoir une reproduction, quoique partielle, de l'ouvrage de Diophante, faite au commencement du XI[e] siècle, a été remarqué aussi par les lecteurs arabes de l'algèbre d'Alkarkhî. C'est ainsi qu'à la fin de la IV[e] section du recueil de problèmes [*], il se trouve dans notre manuscrit la note marginale suivante, faite par le copiste :

ورايت هنا حاشية بخط ابن السراج لفظها اقول ومسائل هذه الطبقة وبعض الطبقة التى قبلها ماخوذة من مقالات ديوفنطس على الترتيب وكتبه احمد بن ابى بكر بن على بن السراج القلانسى انتهى

C'est-à-dire : « J'ai vu en cet endroit une glose de l'écriture d'Ibn Alsirâdj conçue en ces termes : Je dis, les problèmes de cette section et une partie [**] de ceux de la section précédente, sont pris dans les

la partie antérieure du recueil d'Alkarkhî et mentionnés déjà ci-dessus.

[*] Fol. 98 r°.

[**] Cette acception du mot بعض résulte, avec une certitude absolue, d'un grand nombre de passages de l'algèbre d'Alkarkhî, où celui-ci s'en sert pour désigner des *fractions* de quantités mathématiques, ce qui met toute incertitude hors de question. Ainsi, on lit dans les règles qui se rapportent à la résolution des équations trinômes du second degré :

فانّ العمل فى اخراج الجذر الواحد ان تردّ الاموال الى مال واحد ان كانت فوق الواحد او تكمله مالا ان كانت دون المال الواحد او تتركه على حاله ان كان مالا واحدا وتعمل جميع ما تعمله بالمال ما يوجب كونه مالا واحدا او اكثر من مال واحد او بعض مال واحد بالاشياء التى تكون معه الخ

« Quant au procédé pour déterminer la valeur de $1\, x$, il consiste à réduire les carrés à un seul carré, s'il y a plus d'un seul, ou de compléter (ce terme) de manière à produire un carré, s'il est au-dessous d'un carré, ou de le laisser tel qu'il est, si c'est un carré; puis de soumettre les choses ajoutées au carré, etc. à toutes les opérations exigées par la nature des carrés, selon que c'est un carré, ou plus d'un carré, ou *une fraction de carré.* » Et, d'une manière semblable, ce terme se trouve employé partout dans la suite de l'ouvrage. Comme cette signification est aussi donnée par les dictionnaires, je n'en parlerais pas, si, d'un côté, il ne m'importait pas de préciser bien exactement le sens des expressions de la glose dont il s'agit, et si, d'un autre côté, Rosen ne s'était pas trompé à ce sujet, en traduisant بعض رجل par « certain persons, » tandis que le sens était « une fraction de personne. » (Voir Mohammed Ben Moûçâ, p. 59 de la traduction.)

livres de Diophante, suivant l'ordre. Ceci fut écrit par Ahmed Ben Abi Beqr Ben Alî Ben Alsirâdj Alkelâneci. Fin (de la glose.) »

Cette glose m'avait beaucoup frappé et m'avait fait espérer que j'avais retrouvé, dans Alkarkhî, une partie perdue de l'ouvrage de Diophante.

En disant que les problèmes de la III[e] section sont empruntés à Diophante, *en partie* *, et en ne faisant aucune restriction semblable pour la IV[e] section, l'auteur de la glose donne à entendre qu'il attribue cette dernière section, en entier, à l'auteur grec.

Or, cette section commence par quatorze problèmes correspondant aux quatorze derniers problèmes du second livre de Diophante, et se termine par une reproduction exacte du troisième livre, et, entre ces deux parties, se trouve une série de vingt-cinq problèmes que nous ne retrouvons pas dans l'ouvrage de Diophante, tel que nous le possédons. On pouvait donc croire que cette série représentait un livre perdu de l'algébriste grec, qu'on aurait à placer entre le second et le troisième livre de la rédaction actuelle. Mais j'ai fini par abandonner cette supposition, par les raisons suivantes :

Les douze premiers des vingt-cinq problèmes dont il s'agit, dépendent d'équations déterminées, deux du premier, les autres du second degré, ou dérivatives du second degré, conduisant, à deux exceptions près, à des résultats irrationnels, ou affectées déjà dans l'énoncé, de coefficients irrationnels. Cela est entièrement contraire au caractère de l'ouvrage de l'algébriste grec, et on ne peut pas douter un instant, que nous n'ayons ici devant nous un produit de l'esprit arabe. Il y a même une circonstance, minime en apparence, mais qui acquiert ici un poids

La traduction latine publiée par M. Libri (*Hist. des sciences mathém. en Italie*, vol. I, p. 285), porte ici très-bien : « Dragma et « semis fuit divisa per hominem et partem « hominis. » Il est vrai qu'au premier abord, il peut paraître étrange de parler de fractions de personnes.

* C'est la suite des problèmes 24-45 de cette section, qui sont empruntés tous à Diophante, à l'exception seulement des problèmes 33 et 39 que, d'après le caractère de leurs énoncés et la manière dont ils sont traités, je serais très-porté à restituer à Diophante, comme appartenant réellement à celui-ci.

particulier pour prouver que ces problèmes sont étrangers à l'ouvrage de Diophante. C'est que dans un de ces problèmes, on arrive à une équation renfermant la 8e puissance de l'inconnue, tandis que Diophante ne définit que les puissances jusqu'à la 6e inclusivement, et ne fait réellement usage que de celles-ci.

Les treize autres problèmes sont indéterminés et du second degré. J'ai discuté ci-dessus (pages 12-15, nos 2-4, 7 et 8) les méthodes employées dans leur résolution. Or, d'un côté, quelques-unes de ces méthodes, notamment celles des numéros 4 et 8, montrent un caractère étranger à l'analyse de Diophante. D'un autre côté, il y a encore ici une circonstance particulière, à savoir, que l'auteur ajoute à la fin de deux de ces problèmes (IV, 27 et 39) des remarques sur l'utilité et sur les limites des méthodes employées, et qu'il renvoie même, pour des explications ultérieures, à son commentaire, ce qu'il ne fait jamais à l'occasion des problèmes tirés de Diophante. Je suis donc porté à croire que ces treize problèmes n'ont, pas plus que les douze premiers, appartenu à un exemplaire plus complet de l'ouvrage de Diophante, d'où l'auteur arabe les aurait extraits.

Passons maintenant à l'examen des emprunts faits à Alkarkhi par Léonardo Pisano.

Je me servirai, dans les rapprochements à faire à ce sujet, du xve chapitre du Traité de l'Abacus de Fibonacci, inséré par M. Libri parmi les pièces justificatives jointes au second volume de son Histoire des sciences mathématiques en Italie. Comme, cependant, ce morceau a été publié par M. Libri avec toutes les défectuosités que présentait le manuscrit, je ne pourrai pas me borner à y renvoyer simplement, comme je viens de le faire pour les problèmes de Diophante. Je vais donc reproduire, un à un, les énoncés des problèmes de Fibonacci qui présentent des analogies avec ceux d'Alkarkhi *. Je traduirai ces énoncés en formules algébriques et les accompagnerai de remarques sur la conformité ou la différence des solutions qu'en ont données l'algébriste arabe et le géomètre de Pise.

* Je suivrai, dans cette énumération, l'ordre des problèmes d'Alkarkhi.

Libri, t. II, pag. 403, lig. 19.		$x(x+\sqrt{10}) = 9x.$
406,	17.	$\sqrt{8x} \cdot \sqrt{3x} + 20 = x^2.$
407,	20.	$\sqrt{6x} \cdot \sqrt{5x} + 10x + 20 = x^2.$

Ces trois problèmes ne diffèrent que dans le choix des constantes, le second d'une seule, de II, 35, 36, 37 d'Alkarkhî. Fibonacci en obtient la solution en les construisant géométriquement, suivant la manière dont les algébristes arabes se servent pour démontrer les règles algébriques de la résolution des équations du second degré.

Pag. 411, l. 13.		$x+y=10, \quad y^2 - x\sqrt{8} = 40.$
414,	15.	$x-y=5, \quad \sqrt{x \cdot 10x} = y^2.$
420,	18.	$(\sqrt{x \cdot 2x} + 2) \cdot x = 30.$

Ces problèmes sont identiques avec II, 39, 40, 41 d'Alkarkhî, et sont traités par Fibonacci de la même manière que par Alkarkhî; seulement, celui-ci se borne, pour le premier et le troisième de ces problèmes, à les ramener à la forme canonique de l'équation du second degré. Dans le premier problème, Fibonacci, après l'avoir ramené, comme Alkarkhî, à l'équation $x^2 + 60 = 20x + \sqrt{8x^2}$, ajoute une seconde solution, dans laquelle il ramène ce problème à l'équation $y^2 + \sqrt{8y^2} = 40 + \sqrt{800}$, qu'il construit géométriquement.

Pag. 408, l. 31.	$x+y=10, \quad \frac{x \cdot y}{y-x} = \sqrt{6}$

ne se distingue de II, 49 d'Alkarkhî qu'en ce que le second membre de la seconde équation est, chez celui-ci, $\sqrt{10}$. Après avoir ramené le problème à une équation du second degré, Fibonacci construit celle-ci géométriquement, et vérifie ensuite le résultat obtenu.

Pag. 388, l. 20.		$x+y=10, \quad \frac{y}{x} + x = 5\frac{1}{2}.$
389,	17.	$x+y=10, \quad \left(\frac{y}{x} + y\right) x = 30.$
390,	7.	$x+y=10, \quad \frac{y}{x} \cdot y = 9.$
386,	3.	$x+y=10, \quad \frac{y}{x}(y-x) = 24.$

Ces problèmes sont identiques avec III, 12, 13, 14, 16 d'Alkarkhî. Tandis que Fibonacci ramenait les problèmes précédents, de la même manière qu'Alkarkhî, aux équations du second degré dont ils dépendent, pour résoudre ensuite celles-ci par une construction géométrique, il ne s'occupe, dans les problèmes actuels, que des opérations nécessaires pour arriver à l'équation du second degré. Il représente, pour cet effet, les deux inconnues et leurs différentes combinaisons par des lignes, d'une manière qui approche d'une véritable notation algébrique, surtout dans le troisième de ces problèmes*. L'équation du second degré obtenue, il la résout algébriquement dans le premier de ces problèmes; dans les trois autres, il se borne à la faire suivre simplement des valeurs des inconnues qui en résultent. Enfin, tandis qu'Alkarkhî élimine y pour obtenir des équations en x, Fibonacci élimine x, et obtient des équations en y.

Pag. 382, l. 4. $x+y=10,\ \left(\frac{x}{y}+10\right)\left(\frac{y}{x}+10\right)=122\frac{2}{3}.$

383, 7. $x+y=10,\ \left(10+\frac{y}{x}\right)\left(10-\frac{x}{y}\right)=107\frac{1}{3}.$

Le premier de ces deux problèmes ne diffère de III, 18 d'Alkarkhî, que par la valeur numérique du second membre de la seconde équation. Fibonacci le ramène à celui-ci : $x+y=a,\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=b$**, en employant sa notation linéaire. Le second problème est identique avec III, 19 d'Alkarkhî. Fibonacci le résout en combinant, d'une manière ingénieuse, sa notation linéaire avec une construction géométrique.

Pag. 392, l. 6. $\left(x-\frac{x}{3}\right)\cdot 3\sqrt{x}=x.$

Ce problème est identique avec III, 22 d'Alkarkhî. Fibonacci le résout par un raisonnement différent de celui employé par Alkarkhî.

* Il faut bien distinguer la construction géométrique des problèmes précédents de cet emploi de lignes dans des opérations algébriques. Celle-là sert pour résoudre l'équation, celui-ci pour l'obtenir; celle-là commence où celui-ci finit. Dans celle-là on substitue la géométrie à l'algèbre; dans celui-ci, Fibonacci se sert de ces lignes uniquement pour désigner, d'une manière plus concise, les quantités qui sont l'objet ou le résultat des opérations algébriques.

** Il avait résolu ce problème plus haut, p. 369, l. 27.

Pag. 392, l. 12. $4\sqrt{x^2-3x}+3x=20.$

393, 17. $4\sqrt{x^2-3x}+3x=x^2+4.$

394, 13. $10\sqrt{x^2-8x}+8x=x^2+21.$

Ces problèmes sont très-semblables à III, 21, 23 d'Alkarkhî. Fibonacci se sert, pour les ramener à des équations du second degré et pour résoudre celles-ci, de considérations et de constructions géométriques.

Pag. 442, l. 3. $2\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}}=x^2.$

443, 1. $2\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}}=20.$

Ces problèmes sont identiques avec IV, 17, 18 d'Alkarkhî. Fibonacci résout le premier par des considérations géométriques, le second par un procédé purement algébrique, mais différent de celui employé par Alkarkhi.

Pag. 447, l. 26. $(x+7).\sqrt{3x}=10x.$

448, 16. $y=3x,\quad (y+\sqrt{y})(x+\sqrt{x})=10y.$

449, 31. $x+\sqrt{x}+\sqrt{2x}+\sqrt{5x^2}=10.$

Ce sont les problèmes IV, 20, 21, 22 d'Alkarkhî. Fibonacci procède, dans leur résolution, d'une manière purement algébrique qui, dans le premier problème, s'éloigne de celle d'Alkarkhi, mais dans les deux autres présente la plus grande conformité avec les procédés de l'auteur arabe.

Pag. 451, l. 3. $x^2+y^2=z^2,\quad x.z=y^2,\quad x.y=10.$

Dans la résolution de ce problème, qui est identique avec IV, 23 d'Alkarkhî, Fibonacci reproduit d'abord les procédés au moyen desquels Alkarkhî ramène le problème à une équation dérivative du second degré. Ensuite il construit géométriquement les valeurs des inconnues.

Pag. 461, l. 14 $x+y=10,\quad x-2\sqrt{x}=y+2\sqrt{y}.$

Ce problème, ainsi que la première des solutions qu'en donne Fibonacci, sont entièrement conformes au problème et à la solution

IV, 24 d'Alkarkhî. C'est donc à celui-ci que s'adressent les éloges de Cossali*, au sujet du choix ingénieux des inconnues dans cette solution**.

Pag. 475, l. 16. $x + y = 10$, $\left(\frac{10}{x} + \frac{10}{y}\right)^2 = 30$.

Ce problème ne se distingue de IV, 25 d'Alkarkhî que par la valeur numérique du second membre de la seconde équation, et la résolution qu'en donne Fibonacci est, de tout point, la même que celle d'Alkarkhî.

Il résulte des rapprochements que je viens de faire, qu'une partie considérable*** des problèmes de Fibonacci est tirée de l'ouvrage d'Alkarkhî; que les énoncés de ces problèmes sont identiques dans les deux ouvrages, ou ne présentent que des différences non essentielles; mais que les solutions de Fibonacci sont, pour la plupart, différentes

* *Origine dell' algebra*, t. I, p. 5.

** Les deux solutions suivantes ne sont pas essentiellement différentes de la première; mais la quatrième solution que Fibonacci donne de ce problème (p. 464, l. 15 sqq.) mérite d'être remarquée. De

$$x - p\sqrt{x} = y + p\sqrt{y},$$

on tire $p = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$,

ce qui donne

$$x - p\sqrt{x} = y + p\sqrt{y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y},$$

de sorte que, en posant

$$y = x_1^2, \quad x = 10 - x_1^2,$$

on aura $x_1^2 + 2x_1 = x_1 \cdot \sqrt{10 - x_1^2}$,

ou $(x_1 + 2)^2 = 10 - x_1^2$,

ou $x_1^2 + 2x_1 = 3$,

d'où il suit $x_1 = 1$, $y = 1$, $x = 9$.

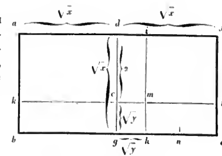
Fibonacci démontre le théorème général que, lorsque

$$x - p\sqrt{x} = y + p\sqrt{y},$$

on a aussi

$$x - p\sqrt{x} = y + p\sqrt{y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y},$$

au moyen de la figure suivante,



où l'on voit, en effet, que

tant $kg = x - 2\sqrt{x}$,

que $ce = y + 2\sqrt{y}$

sont aussi égaux à $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$. Ensuite, il se sert de la même figure pour construire l'équation $x_1^2 + 2x_1 = 3$.

*** Souvent Fibonacci, après avoir discuté un problème, indique comment la solution s'obtient d'une manière plus ou moins analogue, lorsque l'énoncé subit certaines modifications. Cette circonstance ne permet pas de préciser exactement le nombre des problèmes de Fibonacci. J'ai compté quatre-

de celles d'Alkarkhî, montrant un caractère arabe lorsque ce sont des constructions géométriques, un caractère original là où Fibonacci se sert des lignes comme de représentants des expressions algébriques.

J'aurais pu étendre ces rapprochements à plusieurs autres problèmes de Fibonacci, mais je n'ai pas voulu entrer dans des comparaisons trop vagues. Je me suis donc borné à ne faire remarquer que les identités ou les analogies évidentes. Je dois cependant signaler encore une circonstance qui me paraît digne d'être remarquée. C'est que souvent les problèmes de Fibonacci forment des groupes, de sorte que chaque problème d'un tel groupe ne se distingue des autres, que par de légères modifications de l'énoncé. Or, plusieurs fois le recueil d'Alkarkhî contient un seul ou quelques-uns des problèmes d'un semblable groupe, tandis que les autres ne s'y trouvent pas.

Cela peut s'expliquer de deux manières. Ou bien le recueil d'Alkarkhî lui-même ne serait que l'extrait d'un autre ouvrage arabe du même genre, d'où Fibonacci, de son côté, aurait tiré ses problèmes; ou bien Fibonacci aurait multiplié ainsi les problèmes qu'il trouvait dans l'ouvrage d'Alkarkhî, en modifiant les énoncés de la manière que

vingt-dix à cent numéros, de sorte que les problèmes énumérés ci-dessus constituent au moins un quart du recueil entier. Une autre partie considérable des problèmes de Fibonacci est empruntée à Mohammed Ben Moûçâ, ainsi qu'on le trouvera en comparant les endroits suivants de l'édition du chapitre de Fibonacci par M. Libri, et de l'édition de Mohammed Ben Moûçâ par Rosen :

Libri, t. II.		Rosen, trad. angl.	
Pag. 364,	lig. 20.	Pag. 35,	lig. 15.
366,	4.	36,	19.
366,	14.	37,	16.
367,	15.	38,	11.
368,	9.	39,	17.
369,	5.	42,	18.
Pag. 369,	lig. 14.	Pag. 40,	lig. 21.
369,	27.	44,	18.
371,	5.	46,	12.
372,	4.	63,	11.
381,	5.	51,	13.
395,	15.	55,	13.
395,	29.	53,	21.
396,	1.	54,	4.
396,	4.	54,	9.
396,	8.	54,	15.
396,	13.	58,	8.
397,	11.	60,	7.
398,	8.	66,	9.
398,	14.	67,	14.
398,	20.	{62,	13.
		{64,	18.
398,	31.	56,	21.

je viens de dire. Je penche pour cette dernière opinion, parce que la même chose se répète à l'occasion de problèmes tirés de Mohammed Ben Moûçâ, et qu'il est très-invraisemblable que Fibonacci ait également eu à sa disposition les sources auxquelles avait puisé ce dernier auteur.

On sait que Fibonacci a composé aussi un traité des nombres carrés, et qu'il a discuté, dans cet ouvrage, diverses questions d'algèbre indéterminée. J'aurais voulu examiner si cet écrit ne présente pas également quelques traces d'emprunts faits au traité d'Alkarkhî; mais l'original de cet ouvrage de Fibonacci étant perdu, j'ai dû m'en rapporter à l'analyse qu'en a donnée Cossali *.

Cette analyse est divisée en quatre parties. La première traite de la génération des nombres carrés par la sommation de la suite des nombres impairs, et de problèmes qui en dépendent. Cette théorie est étrangère à l'ouvrage d'Alkarkhî **.

La seconde partie contient des problèmes d'égalité simple. Le premier de ces problèmes *** correspond à III, 38 d'Alkarkhî, qui est la reproduction de II, 11 de Diophante. Cossali a montré **** la différence qui a lieu entre les solutions de Fibonacci et de Diophante, en faisant valoir, surtout, que celle de Diophante est plus générale. Mais, de la manière dont Alkarkhî a reproduit ce problème, il se rapproche sensiblement de la forme sous laquelle il se trouve chez Fibonacci.

Les trois problèmes suivants ***** correspondent à III, 3, 36, 37 d'Al-

* *Origine dell' algebra*, t. I, p. 115 sqq.

** Voir aussi l'addition II.

*** $x^2 - y^2 = 2a + 1$.

**** *Orig.* t. I, p. 117, 167, 168.

***** $x^2 + y^2 = z^2$; $x^2 + y^2 = a^2$;

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2;$$

Cossali, *Orig.* t. I, p. 118, 119, 167, 168. On en trouve une rédaction originale dans le fragment du Traité de l'Abacus, publié par M. Libri, *Hist. des sciences mathématiques en Italie*, t. II, p. 343, l. 31 à p. 348, l. 9. En enchaînant l'une à l'autre les solutions des problèmes, Cossali arrive, dans son exposé, à des formules très-compliquées. Voici des formules plus simples que je tire du fragment original que je viens de citer :

1. $x^2 + y^2 = z^2$.

Prenons deux nombres de la forme $\mu\alpha^2$, $\mu\beta^2$, étant tous les deux pairs ou impairs, on aura $x = \mu\alpha\beta$, $y = \frac{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}{2} - \mu\beta^2$.

$$z = \frac{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}{2}.$$

Cette solution est la même que celle d'Eu-

karkhî; mais les méthodes de Fibonacci sont entièrement différentes de celles qu'Alkarkhî reproduit d'après Diophante.

Les problèmes 5, 6, 7[*] correspondent à II, 22, 23 d'Alkarkhî; ce qui est bien remarquable, c'est que, de même que je viens de le faire observer au sujet du problème III, 38 d'Alkarkhî, la méthode de celui-ci étant plus générale, sa solution est pourtant, *de fait*, conforme à la règle plus restreinte de Fibonacci. Cela pourrait faire croire que Fibonacci ait formé sa règle d'après la solution d'Alkarkhî, dont il ne reconnut pas la méthode générale dans l'application faite à un cas particulier. D'ailleurs, Alkarkhî donne, dans la partie théorique de son ouvrage[**], la formule générale de laquelle dépend la résolution de ces problèmes, à savoir que, si l'on suppose $a = m \cdot n$, $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + a$ et $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - a$ sont des nombres carrés. Les solutions de Fibonacci correspondent au cas spécial de $n = 1$.

Les deux derniers problèmes de la seconde partie, ainsi que toute la troisième partie de l'exposé de Cossali n'ont pas des problèmes correspondants dans l'ouvrage d'Alkarkhî[***]. Notamment la théorie des nombres « congrus et congruents » est étrangère à celui-ci.

Enfin, quant à la sommation des cinq suites que Cossali discute dans la quatrième partie de son exposé, la première et la quatrième[****], à savoir, la somme de la suite des nombres carrés et des nombres cubes, sont données aussi par l'auteur arabe[*****], et il me paraît assez

clide, *Éléments*, X, 29, lemme 1. Une autre solution est fondée sur la génération des nombres carrés par la sommation de la suite des nombres impairs.

2. $x^2 + y^2 = a^2$.

Trouvons (d'après 1) trois nombres α, β, γ, tels que $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$,

on aura $x = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot a$, $y = \frac{\beta}{\gamma} \cdot a$.

3. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Résolvons encore $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

on aura $x = \frac{a\alpha \pm b\beta}{\gamma}$, $y = \frac{a\beta \mp b\alpha}{\gamma}$.

[*] $x^2 + a = y^2$; $x^2 - a = y^2$;
$x^2 + a = y^2$, $z^2 - a = t^2$.
(Cossali, t. I, p. 120, 121, 168.)

[**] Fol. 26 r° du ms.

[***] Quant aux n[os] 2, 3 et 4 de la troisième partie de l'exposé de Cossali, qui présentent une certaine analogie avec II, 29, 31 et IV, 29, 31 d'Alkarkhî, j'y reviendrai plus loin. (Voir p. 43, deuxième note.)

[****] Cossali, t. I, p. 155, 163.

[*****] Fol. 21 r° sqq. fol. 23 v° sqq. du ms.

probable que ces deux théorèmes ont été empruntés par Fibonacci, soit à Alkarkhî, soit à un autre auteur arabe.

Je répète, cependant, que l'absence de l'original du traité des nombres carrés, m'oblige de donner les rapprochements que je viens de faire entre celui-ci et l'ouvrage d'Alkarkhî, plutôt comme des conjectures que comme les résultats d'un examen rigoureux.

Après avoir constaté ce que l'algèbre arabe du xe siècle a pu léguer au premier algébriste italien et emprunter au dernier algébriste grec, je devais naturellement examiner aussi, si elle n'était pas redevable d'une partie des éléments qu'elle renferme, aux algébristes indiens. C'est ce que j'ai fait en comparant l'ouvrage d'Alkarkhî aux ouvrages ou parties d'ouvrages de Bhascara * et de Brahmegupta, traduits par Colebrooke. Le résultat de cet examen a été négatif, tant en ce qui concerne le caractère général des méthodes, qu'en ce qui concerne les éléments particuliers dont se composent le traité arabe et les traités indiens.

D'abord, quant aux méthodes, les travaux des Indiens ont un caractère de généralité qui les rapproche de ceux des modernes, et auquel ni les mathématiques des Grecs, ni celles des Arabes n'ont réussi à s'élever.

Puis, quant aux détails, s'ils semblent montrer en partie une certaine conformité, on s'aperçoit pourtant bientôt que cette conformité n'existe que là où la nature même de la chose l'exige, et qu'elle disparaît partout où une différence dans la manière de traiter le sujet devient possible.

Ainsi, on trouvera naturel que les savants de deux nations qui connaissent l'algèbre, possèdent aussi des principes de calcul algébrique, et qu'en exposant ces principes ils soient obligés, les uns et les autres, de dire à peu près la même chose. On ne s'étonnera donc pas de voir traiter, par exemple, le calcul des quantités irrationnelles aussi bien

* Il ne peut pas s'agir ici d'emprunts matériels faits par le géomètre arabe à Bhascara, qui est postérieur à Alkarkhî d'un siècle et demi; mais d'après les savantes recherches de Colebrooke, l'algèbre indienne avait atteint, longtemps avant Bhascara, l'état de perfection que présentent les ouvrages de cet auteur.

par Alkarkhî que par Bhascara. Au contraire, en supposant que des ouvrages indiens aient servi de modèles à Alkarkhî, on devrait s'étonner que celui-ci ait manqué d'enrichir son traité de la méthode des Indiens, pour la division des quantités irrationnelles, qui est fondée sur la formule $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$ [*], ainsi que de leur méthode ingénieuse pour l'extraction de la racine des aggrégats de quantités rationnelles et irrationnelles [**].

De même, il ne me paraît pas extraordinaire que les géomètres arabes, initiés par les ouvrages grecs, notamment celui de Nicomaque, à l'étude de l'arithmétique spéculative, aient trouvé la somme de la suite des nombres naturels, des nombres carrés et des nombres cubes, sans les apprendre des Indiens. Mais il me paraîtrait fort surprenant qu'un auteur arabe qui aurait puisé cette connaissance dans les ouvrages indiens, n'en eût pas tiré aussi celle de la formule générale pour la sommation des progressions géométriques [***]. D'ailleurs, Alkarkhî en s'efforçant en vain de donner une démonstration satisfaisante de la formule pour la somme de la suite des carrés [****], nous laisse entrevoir comment lui, ou ses prédécesseurs avaient pu être conduits à la découverte de ces formules.

Il ne serait pas moins invraisemblable qu'un géomètre arabe connaissant l'algèbre indienne et l'emploi constant qu'elle fait de plusieurs inconnues, se fût borné au faible essai d'un calcul, comme celui que j'ai fait remarquer dans les problèmes III, 5 et 6 d'Alkarkhî, et qui porte aussi bien le cachet de l'originalité que celui d'une première tentative.

Mais surtout il me paraît impossible qu'un géomètre qui appréciait l'analyse de Diophante au point de copier presque trois livres de son ouvrage, et qui avait essayé, non sans succès, de reculer les limites des théories qu'il avait puisées dans l'étude de l'algébriste grec, il

[*] Colebrooke, *Algebra, etc. of Brahmegupta and Bhascara*, p. 147.

[**] *Ibid.* p. 149 sqq.

[***] *Ibid.* p. 55.

[****] Fol. 21 r° sqq. du ms.

me paraît impossible que ce même géomètre ait pu connaître, sans en parler, ces belles méthodes indiennes d'analyse indéterminée, qui font l'admiration des géomètres modernes.

Or, on ne trouve chez Alkarkhî ni la méthode des Indiens, essentiellement conforme à celle des modernes, pour résoudre en nombres entiers les équations indéterminées du premier degré, ni la méthode, découverte une seconde fois par Euler, qui sert à trouver un nombre infini de solutions de l'équation $cx^2 + a = y^2$, ni la plupart des autres méthodes indiennes relatives à la résolution des équations indéterminées du second degré.

Comme ce dernier point me paraît particulièrement important, j'ai voulu mettre le lecteur de cette Notice en état de se convaincre lui-même de la différence fondamentale qui existe entre l'algèbre indéterminée d'Alkarkhî et celle des Indiens.

Je fais donc suivre ici l'exposé, en notation algébrique moderne, de tous les chapitres ou sections de chapitres, des ouvrages traduits par Colebrooke qui se rapportent à la résolution des équations indéterminées du second degré.

I. LILAVATI.

TROISIÈME CHAPITRE, QUATRIÈME SECTION.

Trois solutions en expressions générales des deux équations simultanées :

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, \qquad x^2 - y^2 - 1 = t^2.$$

1re $x = \left(\frac{8a^2 - 1}{2a}\right)^2 : 2 + 1.$ $y = \frac{8a^2 - 1}{2a}.$ $z = \frac{64a^4 - 1}{8a^2}.$ $t = \left(\frac{8a^2 - 1}{2a}\right)^2 : 2.$

2e $x = \frac{1}{2a} + a.$ $y = 1.$ $z = \frac{1}{2a} + a.$ $t = \frac{1}{2a} - a.$

3e $x = 8a^4 + 1.$ $y = 8a^3.$ $z = a^2(8a^2 + 4).$ $t = a^2(8a^2 - 4).$

II. VIJA-GANITA.

TROISIÈME CHAPITRE.

PREMIÈRE SECTION. $cx^2 + 1 = y^2.$

1re méthode. Si l'on a $cx^2 + a = y^2$

et

$$cx_1^2 + a_1 = y_1^2,$$

il suit

$$c(xy_1 \pm yx_1)^2 + aa_1 = (cxx_1 \pm yy_1)^2 \text{ *};$$

donc, en résolvant $cx^2 + z = y^2$, équation à laquelle on pourra toujours satisfaire, parce qu'on peut choisir arbitrairement z, on aura

$$c(2xy)^2 + z^2 = (cx^2 + y^2)^2,$$

ou

$$c\left(\frac{2xy}{z}\right)^2 + 1 = \left(\frac{cx^2 + y^2}{z}\right)^2.$$

Le théorème sur lequel ce procéde est fondé, sert aussi à trouver un nombre infini de solutions de l'équation $cx^2 + a = y^2$, si l'on connaît une solution, et en même temps une solution de l'équation $cx^2 + 1 = y^2$.

2[e] méthode. On pose

$$x = \frac{2m}{m^2 - c}$$

en prenant pour m un nombre quelconque **.

Deuxième section. Si l'on a trouvé des valeurs entières satisfaisant à l'équation

$$c\xi^2 + a = n^2,$$

en résolvant l'équation indéterminée du premier degré

$$\xi x + n = ay,$$

on aura

$$cy^2 + \frac{x^2 - c}{a} = \left(\frac{c\xi + nx}{a}\right)^2,$$

où $\frac{c\xi + nx}{a}$ sera également un nombre entier ***.

* En effet, en multipliant la première des deux équations par y_1^2, on a

$$y^2y_1^2 = cx^2y_1^2 + a(cx_1^2 + a_1)$$
$$= cx^2y_1^2 + (y^2 - cx^2)cx_1^2 + aa_1,$$

ou $y^2y_1^2 + c^2x^2x_1^2 = cx^2y_1^2 + cx_1^2y^2 + aa_1$,

et $\pm 2cxx_1yy_1 = \pm 2cxx_1yy_1$;

donc $(cxx_1 \pm yy_1)^2 = c(xy_1 \pm yx_1)^2 + aa_1$.

** C'est ce qu'on obtient en posant

$$y = mx - 1.$$

*** Je fais observer que cela n'est vrai que tant que a et ξ n'ont pas de commun diviseur. Car, supposons $a = mf$, $\xi = nf$, il suivra de l'équation $\xi x + n = ay$, que aussi $n = pf$. Conséquemment

$$\frac{c\xi + nx}{a} = \frac{ny - 1}{\xi} = \frac{pyf - 1}{nf},$$

ce qui ne peut pas être un nombre entier. La même observation s'applique aussi au terme constant de la nouvelle équation :

$$\frac{x^2 - c}{a} = \frac{ay^2 - 2ny + 1}{\xi^2} = \frac{(my - 2p)yf + 1}{n^2f^2}.$$

Mais dès que ξ et a n'out pas de commun diviseur, on a

Troisième section. $cx^2 - 1 = y^2$.

Cette équation ne peut être résolue que lorsque $c = m^2 + n^2$. Cette condition étant remplie, on aura

$$c - m^2 = n^2,$$

$$c - n^2 = m^2;$$

donc $$c\left(\frac{1}{m}\right)^2 - 1 = \left(\frac{n}{m}\right)^2, \qquad c\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 1 = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

L'équation proposée étant

$$c^2x^2 + a = y^2,$$

on aura $$x = \left(\frac{a}{m} - m\right) : 2c, \qquad y = \left(\frac{a}{m} + m\right) : 2\ ^{*}.$$

SEPTIÈME CHAPITRE.

Ce chapitre traite de la résolution de l'équation

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = f(y, z, t\ldots)$$

et plus spécialement des différents cas que peut présenter l'équation

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = ay^2 + by + c.$$

Quant au premier membre, on peut toujours le ramener à la forme $(mx + n)^2$, notamment en le multipliant par $4a_1$, et en ajoutant au produit $b_1^2 - 4a_1c_1$, de sorte que si l'on peut satisfaire ensuite à l'équation

$$4a_1f(y) + b_1^2 - 4a_1c_1 = z^2,$$

on aura $$x = \frac{z - n}{m}.$$

Il s'agit donc de discuter les différentes formes que peut présenter le second membre de l'équation proposée, après la transformation du premier membre dans un carré complet.

$$c\xi = \frac{\eta^2 - a}{\xi}, \quad \eta x = \frac{a\eta y - \eta^2}{\xi};$$

et, $c\xi$ et ηx étant des nombres entiers, leur somme $\frac{a(\eta y - 1)}{\xi}$ sera également un nombre entier; mais a et ξ n'ayant pas de commun diviseur, il suit que $\frac{\eta y - 1}{\xi}$ ou $\frac{c\xi + \eta x}{a}$ soit un nombre entier; c. q. f. d.

* C'est ce qu'on obtient en posant

$$y = cx + m$$

(1) $$ay^2 + b.$$

On pose $$ay^2 + b = z^2,$$

équation discutée dans le troisième chapitre.

(2) $$ay^{2(p+1)} + by^{2p}.$$

On résout $$ay^2 + b = z^2,$$

et l'on a $$x = \frac{zy^p - n}{m}.$$

(3) $$ay^2 + by + c.$$

On pose $$ay^2 + by + c = z^2,$$

ce qu'on peut toujours transformer dans

$$(m_1 y + n_1)^2 = a'z^2 + b';$$

on résout $$a'z^2 + b' = t^2,$$

et l'on a $$x = \frac{z - n}{m}, \qquad y = \frac{t - n_1}{m_1}.$$

(4) $$ay + b.$$

On pose $$ay + b = m_1^2,$$

m_1 étant choisi arbitrairement,

et l'on a $$x = \frac{m_1 - n}{m}, \qquad y = \frac{m_1^2 - b}{a}.$$

(5) $$ay^2 + bz^2 + c.$$

On suppose, dans ce cas et dans les cas suivants, qu'il s'agit de satisfaire en même temps à une seconde équation $F(y, z) = 0$. On choisira « avec sagacité, » un nombre m_1 ou n_1 tel qu'en posant $y = m_1 z$ ou $y = z + n_1$, on obtienne $(am_1^2 + b)z^2 + c = t^2$, ou $(a + b)z^2 + 2an_1 z + (c + an_1^2) = t^2$*. On aura $x = \frac{t - n}{m}$. Puis on résout $F(m, z, z) = 0$ ou $F(z + n_1, z) = 0$.

* On satisfera à la première ou à la seconde équation, si l'on peut faire respectivement $am_1^2 + b$ ou $an_1^2 + c$ égal à un carré; dans l'un et dans l'autre cas, on est donc ramené à l'équation $ay_1^2 + b = z_1^2$; ce sera même la seule équation à résoudre, lorsque $c = 0$.

(6) $$a^2y^2+f(z).$$

Conformément à la dernière règle du III[e] chapitre, on pose

$$y=\frac{\frac{f(z)}{m_1}-m_1}{2a},$$ [*]

on aura $$x=\left(\frac{f(z)+m_1^2}{2m_1}-n\right):m;$$

puis on résoudra $$F\left(\frac{f(z)-m_1^2}{2am_1},z\right)=0.$$

(7) $$ay^2+byz+cz^2.$$

On pourra transformer cette expression dans

$$(m_1y+n_1z)^2+p_1y^2+q_1z^2,$$

et l'on posera, d'après la règle qu'on vient de citer,

$$m_1y+n_1z=\left(\frac{p_1y^2+q_1z^2}{r_1}-r_1\right):2.$$

La règle indienne ne va pas plus loin. L'exemple qui se rapporte à ce cas est de la forme

$$a^2y^2+byz+cz^2,$$

ce qui peut être transformé dans

$$(m_1y+n_1z)^2+p_1z^2,$$

de sorte qu'en prenant z en place de la valeur arbitraire r_1, on obtient

$$m_1y+n_1z=\frac{p_1-1}{2}z;$$

donc $$y=\frac{p_1-2n_1-1}{2m_1}.z,$$

ce qu'on peut substituer ensuite dans $F(y,z)=0$.

(8) $$ay^2+f(z,t,v,w\ldots)$$

On donne à $t, v, w\ldots$ des valeurs arbitraires, et sera ainsi ramené à un des cas de $ay^2+f(z)$.

[*] Il est bien entendu qu'on pourra prendre ici pour m_1 une fonction de z, ce qui contribuera, selon les circonstances, à simplifier considérablement le problème.

(9) Si l'on a $(mx+n)^2 = ay + 1 = z^2, \qquad a_1 y + 1 = t^2,$

posons $$z = av + 1,$$

on aura $$y = av^2 + 2v,$$

donc $$a_1 a v^2 + 2a_1 v + 1 = t^2,$$

ou $$(a_1 a v + a_1)^2 = a a_1 t^2 - a a_1 + a_1^2;$$

ainsi, le problème est ramené à la forme $ay^2 + b = z^2$; on trouve les valeurs de t et de $a_1 a v + a_1$, donc aussi de v, et l'on a

$$y = av^2 + 2v, \qquad x = \frac{av - n + 1}{m}.$$

On trouve encore dans ce chapitre une ou deux autres règles que je ne reproduis pas, parce que, en vérité, elles ne se rapportent qu'aux particularités de problèmes spéciaux. Mais je fais observer que dans la discussion d'un des exemples, on trouve exposé le procédé particulier à Diophante pour la résolution de l'égalité double.

Le chapitre se termine par la résolution, en nombres entiers, des équations

$$x^2 - a = by \quad \text{et} \quad x^3 - a = by.$$

(1) $$x^2 - a = by.$$

Condition : $a = a_1^2$ ou $a \pm mb = a_1^2$.

Prenons un nombre quelconque n tel que $\frac{n^2}{b}$ et $\frac{2na_1}{b}$ soient des nombres entiers, puis posons $$x = nz + a_1.$$

(2) $$x^3 - a = by.$$

Condition : $a = a_1^3$ ou $a \pm mb = a_1^3$.

Prenons un nombre quelconque n tel que $\frac{n^3}{b}$ et $\frac{3na_1}{b}$ soient des nombres entiers, puis posons $$x = nz + a_1.$$

Si l'on avait à résoudre

$$cx^2 - a = by \quad \text{ou} \quad cx^3 - a = by,$$

cela revient, comme on voit, à résoudre

$$x^2 - ac = by \quad \text{ou} \quad x^2 - ac^2 = by.$$

HUITIÈME CHAPITRE.

Équation proposée $x.y.z.t\ldots = f(x, y, z, t\ldots)$

1[re] méthode. On donne à $y, z, t\ldots$ des valeurs arbitraires et résout l'équation en x seul qui en résulte.

2[de] méthode. On ramène (s'il est possible) le problème à l'équation

$$xy = ax + by + c,$$

et l'on pose $\quad x = b \pm m, \quad y = a \pm \frac{ab + c}{m};$

ou $\quad x = b \pm \frac{ab + c}{m}, \quad y = a \pm m.$

La démonstration de l'auteur indien consiste à faire voir que

$$xy - ax - b(y - a) = ab + c,$$

de sorte que $\quad (x - b)(y - a) = m.\frac{ab + c}{m};$

en prenant pour m une valeur arbitraire positive ou négative.

III. OUVRAGE DE BRAHMEGUPTA.

THÉORÈMES CONTENUS DANS LA SEPTIÈME SECTION DU DIX-HUITIÈME CHAPITRE ET QUI NE SE TROUVENT PAS DANS LES TRAITÉS DE BHASCARA.

(1) Quand on a $\quad cx^2 + 4 = y^2,$

en posant $\quad \frac{y^2 - 1}{2} x = x_1, \quad \frac{y^2 - 3}{2} y = y_1,$

on aura $\quad cx_1^2 + 1 = y_1^2.$

Quand on a $\quad cx^2 - 4 = y^2,$

en posant $\quad \frac{(y^2 + 3)(y^2 + 1)}{2} xy = x_1,$

$$\left(\frac{(y^2 + 3)(y^2 + 1)}{2} - 1\right)(y^2 + 2) = y_1.$$

on aura $$c x_1^2 + 1 = y_1^2.$$

On vérifie ces deux règles par un calcul facile.

(2) Problème. $ax + 1 = y^2, \quad bx + 1 = z^2.$

On pose $$x = \frac{8(a+b)}{(a-b)^2},$$

et l'on obtient $$y = \frac{3a+b}{a-b}, \quad z = \frac{a+3b}{a-b}.$$

(3) Problème. $x + y = z^2, \quad x - y = v^2, \quad xy + 1 = w^2.$

Brahmegupta pose

$$\frac{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)}{\left[\frac{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)}{2}\right]^2} \cdot (a^2+b^2) = x,$$

$$\frac{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)}{\left[\frac{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)}{2}\right]^2} \cdot (a^2-b^2) = y,$$

on obtient $$z = 2\left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad v = 2\,\frac{a}{b}, \quad w = 2\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 1.$$

(4) Problème. $x \pm a = y^2, \quad x \pm b = z^2.$

En posant $$x = \left(\frac{\frac{a-b}{m} \pm m}{2}\right)^2 \mp a,$$

on a $$y = \frac{\frac{a-b}{m} \pm m}{2}, \quad z = \frac{\frac{a-b}{m} \mp m}{2}.$$

(5) Problème. $x + a = y^2, \quad x - b = z^2.$

En posant $$x = \left(\frac{\frac{a+b}{m} - m}{2}\right)^2 + b,$$

on obtient $$y = \frac{\frac{a+b}{m} + m}{2}, \quad z = \frac{\frac{a+b}{m} - m}{2}.$$

Voici maintenant tout ce qu'il y a de commun entre les méthodes indiennes dont je viens de donner l'aperçu, et celles d'Alkarkhi.

C'est d'abord la résolution indienne des équations $cx^2+1=y^2$ et $c^2x^2+a=y^2$ par les formules $x=\frac{2m}{m^2-c}$ et $x=\frac{a-m^2}{2mc}$, qui est conforme aux principes qu'Alkarkhî trouvait employés dans un nombre abondant de problèmes de Diophante. Personne ne conclura donc, en se fondant sur cette conformité, qu'Alkarkhî ait nécessairement connu les méthodes indiennes, ou que ce soit d'une source indienne que l'algébriste arabe ait dérivé sa théorie de la résolution de l'équation $ax^2+bx+c=y^2$, lorsque a ou c sont des carrés positifs.

Ensuite, c'est la résolution des problèmes II, 29, 30, 31 et IV, 29, 31 d'Alkarkhî, qui dépend d'une formule essentiellement identique avec celle donnée par Brahmegupta dans les deux derniers problèmes rapportés ci-dessus. Mais Alkarkhî rend compte, d'une manière détaillée, de la marche suivie dans ces résolutions, et cette marche est celle qui devait se présenter tout naturellement à l'esprit d'un géomètre, initié comme Alkarkhî, à l'analyse indéterminée de Diophante.

Ces deux points auxquels se borne toute l'analogie entre les méthodes d'Alkarkhî et celles des Indiens, me paraissent entièrement insuffisants comme preuve d'une connaissance de l'algèbre indienne de la part d'Alkarkhî, lorsque celui-ci ne reproduit ni les plus belles méthodes indiennes, ni particulièrement tout ce qui se rapporte à la résolution des équations indéterminées en nombres entiers.

J'arrive donc à la conclusion, qu'à la fin du x[e] siècle de notre ère, l'analyse indéterminée des Indiens était inconnue aux Arabes, et qu'après avoir reçu probablement la résolution des équations déterminées du second degré de savants indiens qui visitèrent la cour des premiers Abassides, les Arabes cultivèrent l'algèbre en l'enrichissant tant d'éléments puisés directement dans des ouvrages grecs, que de découvertes originales, mais portant essentiellement le cachet de l'influence des mathématiciens grecs dont l'étude les avait inspirées.

Il me reste maintenant à dire un mot d'une objection qui se présente naturellement à l'esprit du lecteur.

M. Chasles a montré, par des rapprochements ingénieux*, que la résolution que Fibonacci donne de l'équation indéterminée $x^2+y^2=a^2+b^2$, est essentiellement contenue dans un théorème géométrique de Brahmegupta; et je fais observer que la résolution du problème $x+a=y^2$, $x-b=z^2$ qui, d'après Cossali**, faisait partie du traité des nombres carrés, est la même que celle qu'on trouve ci-dessus parmi les problèmes extraits du XVIIIe chapitre de l'ouvrage de Brahmegupta.

Or, Fibonacci ne pouvait connaître les méthodes indiennes que par l'intermédiaire des géomètres arabes. Si donc les solutions dont je viens de parler sont dérivées nécessairement des théories de Brahmegupta, on est obligé d'accorder aux Arabes une connaissance des méthodes indiennes que je ne puis trouver dans Alkarkhî.

Il serait facile de donner une solution plausible à cette difficulté. Il y a entre Alkarkhî et Fibonacci un intervalle de deux siècles, pendant lesquels les mathématiciens arabes ont pu faire de nouveau connaissance avec l'algèbre indienne, et d'autant plus facilement, que la conquête de l'Inde par Mahmoûd le Ghaznavide avait ouvert ce pays à leurs recherches***. Mais il serait inutile de vouloir résoudre la difficulté par une hypothèse, puisque l'étude des mathématiciens arabes du XIe et du XIIe siècle nous fournira, sans doute, le moyen de résoudre ce problème par des données tout à fait historiques et certaines.

* Voir *Aperçu historique du développement des méthodes en géométrie*, p. 441.

** *Origine dell' algebra*, t. I, p. 124, n° 2. Les problèmes n° 3 et n° 4 ne sont que des cas particuliers du problème général qui les précède. Dans Ghaligai, *Pratica d'Arithmetica*, fol. 61 r°, n° 39, on trouve seulement la solution particulière

$$x=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2+b,$$

au lieu de

$$x=\left(\frac{a+b-m^2}{2m}\right)^2+b.$$

D'ailleurs, cette résolution n'est pas essentiellement différente de celle qu'Alkarkhî donne des problèmes II, 29-31, IV, 29, 31 de son recueil, dont il a été question ci-dessus. On peut donc aussi supposer que Fibonacci marchait ici sur les traces d'Alkarkhî, dont il connaissait évidemment le traité.

*** Voir les savantes recherches de M. Reinaud : *Relations des voyages faits par les Arabes et les Persans dans l'Inde et à la Chine*, t. I, p. XLVIII et XLIX, et *Mémoire sur l'Inde*, p. 24-31, 308 et suiv. et 321.

EXTRAIT DU FAKHRÎ.

I.

PARTIE THÉORIQUE.

PRÉFACE DE L'AUTEUR.

Au nom du Dieu clément et miséricordieux! F. ١١°.

Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî, le calculateur (que Dieu soit miséricordieux envers lui!), dit: « J'ai trouvé que le calcul a pour objet toutes les espèces de détermination des inconnues au moyen des connues, et j'ai remarqué que la plus claire des règles et le plus évident des moyens pour cet effet est l'art de l'algèbre, à cause de sa puissance et de l'universalité avec laquelle il s'étend sur les variétés de tous les problèmes du calcul. J'ai vu que les ouvrages composés sur cet art ne contenaient qu'incomplétement ce dont on a besoin en fait de connaissances élémentaires; qu'ils étaient

بسم الله الرحمن الرحيم

قال ابو بكر محمد بن الحسن الكرخى الحاسب رحمه الله تعالى انى وجدت الحساب موضوعا لاخراج المجهولات من المعلومات فى جميع انواعه والفيت اوضح الابواب اليه وادلّ الاسباب عليه صناعة الجبر والمقابلة لقوتها واطّرادها فى جميع المسائل الحسابية على اختلافها ورأيت الكتب المصنّفة فيها غير ضامنة لما يحتاج اليه من معرفة اصولها

insuffisants par rapport aux théories auxiliaires nécessaires à l'étude de ses doctrines spéciales, et que leurs auteurs avaient négligé l'explication de ses théorèmes qui conduisent au plus haut degré (de savoir dans cet art) et permettent d'arriver à la perfection. Puis j'ai fait dans cet art des découvertes excellentes que je n'ai vu discutées par aucun de ces auteurs, et j'ai résolu des difficultés dont je n'ai trouvé dans leurs ouvrages ni une mention, ni l'explication. Or, après avoir acquis cet avantage, et après avoir éprouvé le besoin de suppléer à ce défaut, je ne pus m'empêcher de composer un ouvrage qui contînt complétement ces connaissances supérieures, et dans lequel je donnasse une explication choisie des éléments de l'algèbre, exempte d'une prolixité désagréable et d'une verbosité rebutante. Mais je fus empêché d'accomplir ce projet par les obstacles qu'y opposaient une époque pleine d'adversités et les malheurs de périodes désastreuses, ainsi que la terreur, la violence et la tyrannie qui frappaient tous les hommes, jusqu'à ce que Dieu, qu'il soit béni et exalté! envoyât à leur aide notre protecteur, le vizir, le seigneur illustre, le parfait dans le gouvernement, le vizir des vizirs, revêtu des deux autorités, Aboû Ghâlib, l'affranchi du commandeur des croyants, que Dieu prolonge son existence! Dieu rendit les hommes heureux par l'excellence de son administration, et, pendant la durée bienheureuse de ses jours, leur accorda, au plus haut degré, tout ce qu'ils désiraient en fait de justice, de sécurité, d'abondance et de bien; il arracha, par son gouvernement, le monde au mal et aux malfaiteurs, et l'illustra par sa surveillance éclairée et par la manière dont il fit revivre les traces effacées de la science. Dieu fit de lui un modèle de toutes les vertus, qui guide les hommes

ولا وفيّة بما يستعان به على علم فروعها وان مصنفيها اهلوا شرح مقدّماتها التى فى
السبيل الى الغاية والوصلة الى النهاية ثم انى استخرجت فى هذه الصناعة بدائع
لم ارَ لاحد منهم فيها كلامًا واستنبطت غوامض لم اجد فى كتبهم لها ذكرًا ولا
بيانًا فلما ظفرت بهذه الفضيلة واحتجت الى جبر تلك النقيصة لم اجد بدًّا من
تأليف كتاب يحيط بها ويشتمل عليها أُلخّصُ فيه شرح اصولها مصفى من كدَر الحشو
ودرن اللغو وكان يعدونى عن ذلك عوادى فساد الزمان وسوء دواير الحدثان ومشاركة
الناس فيما كانوا فيه من الخوف والجذب والجور الى ان أغاثهم الله تبارك وتعالى بمولانا
الوزير السيد الاجلّ الكامل فى الملك وزير الوزرآء ذى الجلالتين ابى غالب مولى امير
المؤمنين اطال الله بقاءه واسعدهم بحسن تدبيره وردّهم فى بشاشة ايّامه السعفة
بغاية ما تمنّوه من العدل والأمن والخصب والخير وطرّ الدنيا بسياسته من العيب
واهله وجلاها ببهجة نظره واحيائه معالم العلم العافية وجعله فى كل فضل اماما

par sa direction et les éclaire par sa lumière. C'est ainsi qu'il dilata les poitrines 2 r°.
des hommes et délivra leurs cœurs de la tristesse. La part qui m'échut de ce grand et universel bienfait, ce fut d'entreprendre avec ardeur la composition de cet ouvrage, dès que les occupations qui m'en empêchaient et les accidents qui y mettaient obstacle eurent cessé, dès que je fus entouré d'un bien-être suffisant, et dès que les hommes jouirent universellement de la tranquillité, du bonheur et du repos dans le pré luxuriant de sa grandeur et dans le pâturage de l'ombre de sa bienfaisance. Je commence donc par la louange de Dieu, qui est la meilleure des introductions et le plus sublime des exordes; je le supplie de donner sa bénédiction à ses saints prophètes et apôtres, et en implorant l'assistance de Dieu (quel protecteur! certes, il nous suffit), pour qu'il me fasse arriver au désir et au but que je me propose, je dis :

« Sache, etc. »

يهتدى بهديته ويُستضاء بنوره فشرح بذلك صدورهم وشفى من الكرب قلوبهم وكان حظّى من هذه النعمة العامّة العظيمة ان اهتززت لتأليف هذا الكتاب بعد زوال الاشغال المانعة والعوائق العادية وشمول السلامة الكافية ومشاركة الناس فى استمهاد الدعة واستيطان الخفض والراحة فى مرتع جنابه ومديد ظلّ انعامه فبدأتُ بحمد الله الذى هو خير مفتتح واجلّ مبتداء وسألته الصلوات على انبيائه ورسله الطاهرين وقلت مستعينا بالله على بلوغ البغية والمراد وهو حسبنا ونعم الوكيل

اعلم الخ

1. PUISSANCES ALGÉBRIQUES (مراتب المجهولات ou اجناس المجهولات).

GÉNÉRATION.	NOM ARABE	TRADUCTION DU NOM ARABE.	EX.
a	جذر ou شيء .... ضلع	racine ou chose... côté.	2
$a^2 = a \, . \, a.$	مال .... بسيط	carré .... surface.	4
$a^3 = a^2 \, . \, a.$	كعب .... جسم	cube .... solide.	8
$a^4 = a^3 \, . \, a = a^2 \, . \, a^2.$	مال مال	carré-carré.	16
$a^5 = a^4 \, . \, a = a^3 \, . \, a^2.$	مال كعب	quadrato-cube.	32
$a^6 = a^5 \, . \, a = a^4 \, . \, a^2 = a^3 \, . \, a^3.$	كعب كعب	cubo-cube.	64
$a^7 = a^6 \, . \, a.$	مال مال كعب	quadrato-quadrato-cube.	128
$a^8 = a^7 \, . \, a.$	مال كعب كعب	quadrato-cubo-cube.	256
$a^9 = a^8 \, . \, a.$	كعب كعب كعب	cubo-cubo-cube.	512

et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

Généralement : lorsqu'on multiplie une quelconque de ces puissances
2 1°. par un certain nombre de racines, le produit est de l'ordre de la puissance suivante.

L'auteur compare ces puissances aux unités, dizaines, centaines, etc.; car, ainsi que $1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3 =$ etc. à l'infini, de même on a $1 : 10 = 10 : 100 = 100 : 1000 = 1000 : 10000 = 10000 : 100000$, où 10 correspond au جذر, 100 au مال, 1000 au كعب, 10000 au مال مال, 100000 au مال كعب.

Note. Le nombre simple est désigné, dans le cours de l'ouvrage, par les expressions آحاد « unités », ou اعداد « nombres », ou دراهم « dirhems ». L'auteur se sert aussi de عدد « nombre », au singulier, pour désigner une expression algébrique en général. Quant au terme مال, il signifie non-seulement le carré de l'inconnue, mais aussi une quantité en général. Je cite, à ce sujet, le problème I, 11 du recueil d'Alkarkhi, où l'on trouve ces deux significations l'une à côté de l'autre : مال ضربته فى نفسه عاد اربعة امثال المال الاول فاجعل المال شيئا واضربه فى نفسه يكن مالا وذلك يعدل اربعة اشياء والشىء اربعة دراهم وهو المال « Lorsqu'une certaine *quantité* est multipliée par elle-même, il résulte quatre fois la première *quantité*. Posez la quantité chose, et multipliez-la par elle-même, il résultera un *carré;* et celui-ci est égal à quatre choses, donc la chose égale à quatre dirhems, ce qui est la *quantité* (cherchée). » Rosen, qui s'est donné la peine, dans sa traduction de Mohammed Ben Moûçâ, d'ajouter en note, partout où *mâl* n'a pas la signification de carré, les mots : « *square*, in the original », a distingué dans sa note, page 50, trop de cas. Les cas 2, 3 et 4 doivent être réunis dans la signification générale de *quantité*.

II. VALEURS RÉCIPROQUES DES PUISSANCES ALGÉBRIQUES.

La *partie* (جزء) d'un nombre quelconque est ce qui, multiplié par ce 3 r°.
nombre, produit l'unité. Lorsque $a > b$, on aura $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^4} = \text{etc. à l'infini.}$$

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} = a^2 : a, \quad \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} = a^3 : a^2, \quad \frac{1}{a} : \frac{1}{a^3} = a^3 : a;$$

Règle générale : $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a.$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3}, \quad \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^4};$$

Règle générale : $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$

$$\frac{1}{a} \cdot a^2 = a, \quad \frac{1}{a} \cdot a^3 = a^2, \quad \frac{1}{a} \cdot a^4 = a^3, \quad \frac{1}{a} \cdot a^5 = a^4,$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot a^3 = a, \quad \frac{1}{a^2} \cdot a^4 = a^2, \quad \frac{1}{a^3} \cdot a^6 = a^3;$$ 3 v°.

Règle générale : $\frac{1}{a^m} \cdot a^n = a^n : a^m,$

donc $\frac{1}{a^2} \cdot a^2 = 1, \quad \frac{1}{a^2} \cdot a = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a}.$

III. MULTIPLICATION (ضرب).

Distinction de *nombres simples* (عدد مفرد), par exemple, les choses, les carrés, le nombre, les parties de chose, etc., et de *nombres composés* (عدد مركب) qui sont des sommes de nombres simples.

A. MULTIPLICATION DU NOMBRE SIMPLE.

Multiplication du nombre simple par le nombre simple.

Elle se ramène à ce qui précède de la manière suivante :

$$5 \times 5a = (5 \times 5)(1 \times a) = 25a.$$

$$5a^3 \times 5a^4 = (5 \times 5)(a^3 \times a^4) = 25a^7.$$

$$10a \times 20a^3 = (10 \times 20)(a \times a^3) = 200a^4.$$ 4 r°.

$$\frac{5}{a} \times 5a^2 = (5 \times 5)\left(\frac{1}{a} \times a^2\right) = 25a.$$

$$2a \times \frac{3}{a^2} = (2 \times 3)\left(a \times \frac{1}{a^2}\right) = \frac{6}{a}.$$

$$\frac{5}{a^2} \times 4a^2 = (5 \times 4)\left(\frac{1}{a^2} \times a^2\right) = 20 . 1 = 20.$$

$$\frac{4}{a^3} \times \frac{4}{a^3} = (4 \times 4)\left(\frac{1}{a^3} \times \frac{1}{a^3}\right) = \frac{16}{a^6}.$$

$$\frac{3}{a} \times 3a^3 = (3 \times 3)\left(\frac{1}{a} \times a^3\right) = 9a^2.$$

4 v°.

Autre espèce de multiplication du nombre simple.

$$(10 : a) \times 10 = (10 \times 10) : a = 100 : a\ ^{*},$$

$$(10 : a^2) \times a = 10 : (a^2 : a) = 10 : a, \text{ ou bien } = (10a) : a^2;$$

on se servira de l'un ou de l'autre selon les besoins et les circonstances.

$$(10 : a^3) \times (a^2 + a) = \{10 : (a^3 : a^2)\} + \{10 : (a^3 : a)\} = \{10 : a\} + \{10 : a^2\}, \text{ ou bien}$$
$$= (10a^2 + 10a) : a^3,$$

5 r°. $$\{50 : (5a + 5)\} \times 5 = 50 : \{(5a + 5) : 5\} = 50 : (a + 1);$$

Règle générale : $(a : b) . c = a : (b : c)$, ou bien $= (a . c) : b$.

Autre espèce de multiplication du nombre simple.

5 v°. $$[10 : \{(a + 1) : a\}] \times 5 = \{(10 \times 5) \times a\} : (a + 1) = 50a : (a + 1);$$

Règle générale : $\{a : (b : c)\} . d = (a . c . d) : b,$

$$[10 : \{3a : (a + 1)\}] \times 3a = [\{10 \times (a + 1)\} : 3a] \times 3a = 10a + 10,$$

puisque $\{a : b\} . b = a.$

Autre espèce de multiplication du nombre simple

6 r°. $$(10 - a) \times 10 = (10 \times 10) - (a \times 10) = 100 - 10a\ ^{**}.$$

* Je me sers de la notation $10 : a$ pour exprimer «*dix unités divisées par chose*» عشرة دراهم مقسومة على شىء, et de la notation $\frac{10}{a}$ pour exprimer «*dix parties de chose*» عشرة أجزاء شىء.

** Ici, l'auteur ajoute : «Il y a des personnes qui sont d'avis que ce nombre $(10 - a)$ est composé, puisqu'il est formé par deux expressions d'un ordre différent. Mais il n'en est pas ainsi, parce que en disant : *dix moins chose*, vous indiquez un seul nombre de l'ordre des unités; si, au lieu de cela, il y avait eu : *dix plus chose*, cela aurait été composé. Cependant, placez les expressions de ce genre dans quelle catégorie vous voudrez, cela ne change rien aux principes du calcul.»

$$(10 - a) \times (10 - a) = (10 \times 10) + \{(-a) \times 10\} + \{(-a) \times 10\} + \{(-a) \times (-a)\}$$

$$= 100 - 10a - 10a + a^2 = 100 + a^2 - 20a\ ^*,$$

puisque $(+a) \times (+b) = +(a \times b)$ et $(-a) \times (-b) = +(a \times b)$,

tandis que dans les autres cas le produit est négatif.

Autre espèce de multiplication du nombre simple.

$$[10 : \{a^2 : (a+1)\}] \times [5 : \{(a+1) : a\}] = [\{10 \times (a+1)\} : a^2] \times [(5 \times a) : (a+1)]$$

$$= \{(10a + 10) \times 5a\} : \{a^2 \times (a+1)\} = (50a^2 + 50a) : (a^3 + a^2);$$ 6 v°

Règle générale : $(a : b) \times (c : d) = (a \times c) : (b \times d)$,

et aussi $(a : b) \times (c : d) = (a : d) \times (c : b)$.

$$\{10a : (a+1)\} \times (20 : a) = \{(10a : a) \times 20\} : (a+1) = 200 : (a+1).$$ 7 r°.

$$\{10a : (a+1)\} \times \{(10a + 10) : a\} = (10a : a) \times \{(10a + 10) : (a+1)\} = 10 \times 10 = 100.$$

B. MULTIPLICATION DU NOMBRE COMPOSÉ.

Elle consiste à multiplier chaque nombre simple du multiplicande (مضروب) par chaque nombre simple du multiplicateur (مضروب فيه), puis à additionner les termes du même ordre. Le nombre de multiplications simples 7 v°. à faire est égal au produit du nombre de termes du multiplicande par le nombre de termes du multiplicateur. « Et, » ajoute l'auteur, « il faut ici compter les quantités négatives (المقادير المستثناة) comme des termes. » Par exemple, dit-il, on voit bien que dans la multiplication de $(10 - 2a)$ par $(10 - 2a)$ il y a 4 produits simples à former.

$$(10 + a^2 + a) + (8 + 2a^2 + 2a)$$

$$= (10 \times 8) + (10 \times 2a^2) + (10 \times 2a) + (a^2 \times 8) + (a^2 \times 2a^2) + (a^2 \times 2a) + (a \times 8) + (a \times 2a^2) + (a \times 2a)$$

$$= 80 + 20a^2 + 20a + 8a^2 + 2a^4 + 2a^3 + 8a + 2a^3 + 2a^2$$

$$= 80 + 30a^2 + 2a^4 + 28a + 4a^3.$$

* Voici le texte de ce passage, pour servir de spécimen de la terminologie de l'auteur, relativement aux quantités négatives :

ومنه عشرة الّا شى فى عشرة الّا شى فاضرب
عشرة فى عشرة تكنماية والّا شى فى عشرة
تكن عشرة اشياء ناقصة والّا شى فى عشرة
تكن عشرة اشياء ناقصة ايضا والّا شى فى
الّا شى مال زايد فيكون المبلغ مايه درهم
ومال الّا عشرين شيئا

$$(5a^3 + 3a^2 + 4a) \times (4 + 5a^2 + 3a)$$

8 r°. $= (5a^3 \times 4) + (5a^3 \times 5a^2) + (5a^3 \times 3a) + (3a^2 \times 4) + (3a^2 \times 5a^2) + (3a^2 \times 3a)$
$+ (4a \times 4) + (4a \times 5a^2) + (4a \times 3a)$

$$= 20a^3 + 25a^5 + 15a^4 + 12a^2 + 15a^4 + 9a^3 + 16a + 20a^3 + 12a^2$$

$$= 25a^5 + 30a^4 + 49a^3 + 24a^2 + 16a.$$

L'auteur fait observer qu'il n'ira pas, dans ces exemples de multiplication, au delà des cubes, parce que les problèmes généralement connus n'en exigent pas davantage, mais que le lecteur sera suffisamment instruit par ce qui précède, pour s'avancer au besoin au delà de cette limite.

$$\{(10 : a) + 3a + 2\} \times [20 + \{5a^2 : (a + 2)\}]$$

$$= \{(10 : a) \times 20\} + [(10 : a) \times \{5a^2 : (a + 2)\}] + (3a \times 20)$$

$$+ [3a \times \{5a^2 : (a + 2)\}] + (2 \times 20) + [2 \times \{5a^2 : (a + 2)\}]$$

$$= (200 : a) + \{50a : (a + 2)\} + 60a + \{15a^3 : (a + 2)\} + 40 + \{10a^2 : (a + 2)\}$$

8 v°. $= \{(50a + 15a^3 + 10a^2) : (a + 2)\} + (200 : a) + 60a + 40.$

$$[5a^2 + \{10a : (a + 2)\} - 3a] \times \{5a^2 + \frac{3}{a^2} + (15 : a)\}$$

$$= (5a^2 \times 5a^2) + \left(5a^2 \times \frac{3}{a^2}\right) + \{5a^2 \times (15 : a)\} + [\{10a : (a + 2)\} \times 5a^2] + \left[\{10a : (a + 2)\} \times \frac{3}{a^2}\right]$$

$$+ [\{10a : (a + 2)\} \times (15 : a)] + \{(-3a) \times 5a^2\} + \left\{(-3a) \times \frac{3}{a^2}\right\} + \{(-3a) \times (15 : a)\}$$

$$= 25a^4 + 15 + 75a + \{50a^3 : (a + 2)\} + \left\{\frac{30}{a} : (a + 2)\right\} + \{150 : (a + 2)\} - 15a^3 - \frac{9}{a} - 45$$

$$= 25a^4 + 75a + \left\{\left(50a^3 + 150 + \frac{30}{a}\right) : (a + 2)\right\} - \left(15a^3 + \frac{9}{a} + 30\right).$$

$$\{10 + 3a + 2a^2 - (4 : a)\} \times \left(3a^2 + 4a - \frac{4}{a^2}\right)$$

9 r°. $= (10 \times 3a^2) + (10 \times 4a) + \left\{10 \times \left(-\frac{4}{a^2}\right)\right\} + (3a \times 3a^2) + (3a \times 4a) + \left\{3a \times \left(-\frac{4}{a^2}\right)\right\}$
$+ (2a^2 \times 3a^2) + (2a^2 \times 4a) + \left\{2a^2 \times \left(-\frac{4}{a^2}\right)\right\} + [\{-(4 : a)\} \times 3a^2] + [\{-(4 : a)\} \times 4a]$
$+ \left[\{-(4 : a)\} \times \left(-\frac{4}{a^2}\right)\right]$

$$= 30a^2 + 40a - \frac{40}{a^2} + 9a^3 + 12a^2 - \frac{12}{a} + 6a^4 + 8a^3 - 8 - 12a - 16 + \frac{16}{a^3}$$

$$= 6a^4 + 17a^3 + 42a^2 + 28a + \frac{16}{a^3} - \left(24 + \frac{40}{a^2} + \frac{12}{a}\right).$$

IV. DIVISION (قسمة).

La division est l'opération inverse (عكس) de la multiplication, parce que, si l'on pose $a \times b = c$, on aura $c : a = b$, et $c : b = a$. Les carrés divisés par des 9 v°.
choses produisent des choses; les choses divisées par le nombre produisent des choses, et divisées par des choses, elles produisent le nombre; une quantité d'un degré quelconque divisée par une quantité de même degré produit un nombre. Lorsqu'on pose $a : b = c$, on aura $c \times b = a$.

$$20a^2 : 4a^2 = 5a.$$

« On ne peut pas diviser une puissance d'un certain ordre par une quantité composée de deux puissances d'un ordre différent; on énonce, en ce cas, le résultat de la division en disant : une telle quantité divisée par une telle. » Exemple : $10a : (a + 2)$.

Au contraire, on peut diviser deux ou plusieurs puissances d'ordres différents par une seule puissance; par exemple :

$$(10a^3 + 10a^2) : 5a = 2a + 2a^2.$$
$$(100a^3 + 100a^2 + 100a) : 5a = 20a^2 + 20a + 20.$$
$$(100a^3 + 100a^2 + 100a) : 10 = 10a^3 + 10a^2 + 10a.$$

Pour que la division soit possible, il est nécessaire que le dividende 10 r°.
(مقسوم) soit au diviseur (مقسوم عليه) dans un rapport connu; par exemple :

$$na^2 : n_1 a = n_2 a\ [*], \qquad na : n_1 a^3 = \frac{n_2}{a}, \qquad n : n_1 a = \frac{n_2}{a}, \qquad na : n_1 = n_2 a.$$

$$\{10a^3 + 10a^2 - (10a + 10)\} : 2a = (10a^3 : 2a) + (10a^2 : 2a) + \{(-10a) : 2a\} + \{(-10) : 2a\}$$
$$= 5a^2 + 5a - \left(5 + \frac{5}{a}\right).$$

Suit une longue remarque dans laquelle l'auteur explique que les puissances ascendantes et descendantes forment deux séries partant de l'unité; que lorsqu'une puissance est plus grande que l'unité, la puissance correspondante de la série opposée est plus petite que l'unité; qu'une puissance de la série descendante peut être plus grande que l'unité (par exemple, $\frac{1}{a^2} > 1$, lorsque $a = \frac{1}{3}$), qu'ici l'unité n'est pas supposée indivisible; que toutes ces puissances forment une suite dont les termes sont en proportion géo- 10 v°.
métrique, jouissant de la propriété que le produit de deux termes, pris à

[*] Textuellement : « lorsque nous divisons les carrés par les choses, il résulte des choses. »

distances égales d'un certain terme moyen, ou de deux termes moyens, est égal au produit du terme moyen en lui-même, ou au produit des deux termes moyens.

11 r°. $$100 : (10 : a) = (100 \times a) : 10 = 100a : 10 = 10a.$$

$$100 : [20 : \{(a + 1) : a\}] = \{100 \times (a + 1)\} : \{20 \times a\} = (100a + 100) : 20a = 5 + \frac{5}{a}.$$

V. RAPPORT (نسبة).

« Le rapport d'une quantité quelconque à une autre quantité est la chose qui, multipliée par le second terme du rapport (المنسوب اليه), produit le premier terme (المنسوب). » — « A cet égard, la division et le rapport sont la même chose. »

11 v°. Ainsi, $3a^2$ par rapport à $30a^2$ * font $\frac{1}{10}$; $3a$ par rapport à $9a^2$ font $\frac{a}{3}$.

D'une manière analogue à ce qui a été observé au sujet de la division, on peut former le rapport de deux quantités à une seule, mais pas celui d'une quantité à deux quantités, à moins qu'elles ne soient pas des expressions algébriques, mais des nombres connus d'unités.

L'auteur termine ce chapitre en caractérisant la différence qui existe entre la division et le rapport, par l'exemple de $20 : 4$ et de $4 : 20$; il dit que $20 : 4 = 5$ rentre dans la catégorie de la division, et $4 : 20 = \frac{1}{5}$ dans celle du rapport.

12 r°. VI. EXTRACTION DES RACINES CARRÉES (استخراج الجذور).

« La racine carrée d'un nombre quelconque est ce qui, multiplié en lui-même, produit le nombre dont on cherche la racine. » L'auteur explique que ce ne sont que les puissances d'un ordre pair qui ont des racines carrées, tandis que les puissances d'un ordre impair n'en ont pas.

$$\sqrt{9a^2} = 3a, \qquad \sqrt{16a^4} = 4a^2, \qquad \sqrt{25a^6} = 5a^3.$$

12 v°. De même, on extrait la racine d'expressions composées de 3, 5 ou 7 termes, par exemple :

$$\sqrt{a^2 + 4a + 4} = a + 2$$

où l'on prend les racines des deux termes extrêmes.

* ثلاثة اموال من ثلاثين مالا.

Pour extraire la racine de $a^4 + 4a^3 + 10a^2 + 12a + 9$, on prendra d'abord les racines de a^4 et de 9, et formera le double produit de l'une par l'autre; on le retranchera du terme moyen de l'expression proposée; du reste $4a^2$ on prend la racine $2a$ et l'ajoute aux deux premières racines; la somme $a^2 + 2a + 3$ est la racine de l'expression proposée.

$$\sqrt{4a^2 + 1 - 4a} = 2a - 1.$$

VII. ADDITION (جمع).

Pour ajouter deux expressions, formées chacune par un seul terme ou par deux ou plusieurs termes de différents ordres, on joint ensemble les termes du même ordre.

$$(5a + 4a^2) + (3a + 3a^2) = (5a + 3a) + (4a^2 + 3a^2) = 8a + 7a^2.$$

Si un terme de l'une des deux expressions n'a pas de correspondant dans l'autre expression, on le laisse tel qu'il était.

$$(5a + 2a^2) + (4a + 5) = (5a + 4a) + 2a^2 + 5 = 9a + 2a^2 + 5.$$ 13 r°

Lorsqu'une des deux expressions contient un terme négatif (استثناء), et que l'autre expression ne contient pas un terme du même ordre, on laisse le terme négatif tel qu'il était; au cas contraire, on le supprime (textuellement : tu le restitues جبرته) contre son équivalent pris sur le terme du même ordre.

$$(5 + 5a - a^2) + 3a = 5 + 8a - a^2.$$

$$(8a + 5a^2 - 5) + (10 + 5a) = 13a + 5a^2 + (10 - 5) = 13a + 5a^2 + 5.$$

$$(5a - 3) + (5 - 3a) = (5a + 5) - (3a + 3) = (5a - 3a) + (5 - 3) = 2a + 2.$$

$$(20 - 40a) + (40 - 20a) = 60 - 20a - 40a.$$

$$(200a - 10) + (200 - 10a) = 190 + 200a - 10a.$$

$$\{5 : (a + 1)\} + \{10 : (a + 1)\} = (5 + 10) : (a + 1) = 15 : (a + 1).$$ 13 v°

Lorsque les deux quantités qu'il s'agit d'additionner n'ont pas le même diviseur, ou qu'elles sont d'un ordre différent, on ne peut pas les additionner, et il faut, dans le résultat de l'addition, les énoncer séparément; par exemple :

$$(5 : a) + \{10 : (a + 1)\}, \qquad \{5a^2 : (a + 1)\} + \{4a^2 : (a + 1)\}.$$

VIII. SOUSTRACTION (تفريق).

Pour retrancher d'une expression consistant en un seul ou en plusieurs termes une autre expression semblable, on retranche chaque terme de celui qui lui correspond; si un terme de la seconde expression (مسقط) n'a pas de correspondant dans la première (مسقط منه), on le retranche (du reste).

14 r°. $(10a + 10) - (3a + 4a^2) = (10a - 3a) + 10 - 4a^2 = 7a + 10 - 4a^2.$

$\{20a : (a + 2)\} - \{10a : (a + 2)\} = (20a - 10a) : (a + 2) = 10a : (a + 2).$

Lorsque la seconde contient un terme négatif, on l'y supprime et ajoute son équivalent à la première; et lorsqu'un terme de celle-là est plus grand que le terme correspondant de celle-ci, on retranche le plus petit du plus grand et retranche la différence de ce qui reste de cette dernière.

$$(8a + 20 + 2a^2) - (10a + 4 - a^2) = \{(8a + 20 + 2a^2) + a^2\} - (10a + 4)$$
$$= (8a + 20 + 3a^2) - (10a + 4) = (8a + 3a^2) + (20 - 4) - 10a$$
$$= (8a + 3a^2 + 16) - 10a = (3a^2 + 16) - 2a.$$
$$(200a + 20) - (20 - 200a) = (2 \cdot 200a + 20) - 20 = 400a.$$

14 v°. $(20a^3 + 8a^2 + 5a - 20) - (10a^3 + 10a^2 + 10a - 8)$

$$= \{(20a^3 + 8a^2 + 5a - 20) + 8\} - (10a^3 + 10a^2 + 10a)$$
$$= (20a^3 + 8a^2 + 5a - 12) - (10a^3 + 10a^2 + 10a)$$
$$= (20a^3 - 10a^3) + (8a^2 - 10a^2) + (5a - 10a) - 12$$
$$= 10a^3 - 2a^2 - 5a - 12 = 10a^3 - (2a^2 + 5a + 12).$$

IX. RÈGLES ET THÉORÈMES DONT ON A BESOIN DANS LE CALCUL ALGÉBRIQUE (ابواب ومؤامرات يستعان بها فى حساب الجبر والمقابلة).

A. MULTIPLICATION DES RACINES DES DIFFÉRENTS DEGRÉS * (ضرب الجذور والاضلاع).

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}; \quad 2\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10} = \sqrt{40}; \quad \frac{1}{2}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10}$

15 r°. $= \sqrt{2\frac{1}{2}}; \quad 2\sqrt{4} \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{20\frac{1}{4}} = \sqrt{16 \cdot 20\frac{1}{4}} = \sqrt{324}.$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216}; \quad 2\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 8} = \sqrt[3]{64}; \quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 27}$$
$$= \sqrt[3]{3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}; \quad 2\sqrt[3]{8} \cdot 2\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{64 \cdot 216}.$$

* La racine carrée est désignée par جذر « racine. » Les racines cube, carré-carrée, etc. s'appellent ضلع الكعب، ضلع مال المال etc. « côté du cube, côté du carré-carré. »

$\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt{\sqrt{1296}} = 6; \qquad 2\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16} = \sqrt{\sqrt{256}};$ 15 v°.

$\frac{1}{2}\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16} = \sqrt[4]{\frac{1}{256} \cdot 16} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}} = \frac{1}{2};$

$\sqrt[4]{a} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{c} = \sqrt{\sqrt{ac}}$, où c est un nombre tel, que $\sqrt[4]{c} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{b}$, nombre qu'on détermine de la manière qu'on vient de montrer.

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{4\sqrt{4} \cdot 27} = \sqrt[3]{\sqrt{16 \cdot 4 \cdot 27}} = \sqrt[3]{\sqrt{64 \cdot 27}} = \sqrt[3]{\sqrt{64 \cdot 27 \cdot 27}} = \sqrt[3]{216}.$$

B. DIVISION DES RACINES DES DIFFÉRENTS DEGRÉS. 16 r°.

$\sqrt{9} : \sqrt{4} = \sqrt{9 : 4}; \qquad 2\sqrt{9} : \frac{1}{2}\sqrt{4} = \sqrt{36} : \sqrt{1} = \sqrt{36 : 1}.$

$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27 : 8}; \qquad 3\sqrt[3]{27} : 2\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(3.\,3.\,3.\,27) : (2.\,2.\,2.\,8)}.$

$\sqrt[3]{10} : \sqrt{4} = \sqrt[3]{\sqrt{(10 \cdot 10) : (4 \cdot 4 \cdot 4)}} = \sqrt[3]{\sqrt{100 : 64}} = \sqrt[3]{\sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}}} = \sqrt[3]{1\frac{1}{4}}.$

$\sqrt{4}$ par rapport à $\sqrt{9} = \sqrt{\frac{4}{9}}$.

C. ADDITION DES RACINES CARRÉES.

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{2\sqrt{4 \cdot 9} + 4 + 9} = 5.$$ 16 v°.

Ici l'auteur fait observer que les paragraphes proposés sur le calcul des racines sont destinés seulement à servir au calcul des nombres sourds (الاعداد الصمّ), parce que, pour les nombres dont on peut extraire la racine (الاعداد المفتوحة), on n'a pas besoin de ces règles. Il remarque encore que les paragraphes précédents sur la multiplication et la division s'appliquent à tous les nombres sourds, tandis que le paragraphe actuel ne s'applique qu'aux nombres semblables (الاعداد المتشابهة), c'est-à-dire à des paires de nombres de la forme $a \cdot b$, $c \cdot d$ où $a : b = c : d$, qui jouissent de la propriété de produire un carré lorsqu'on les multiplie l'un par l'autre**.

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2\sqrt{8 \cdot 18} + 8 + 18} = \sqrt{24 + 8 + 18} = \sqrt{50}.$$

$$\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{8 + 18 - 2\sqrt{8 \cdot 18}} = \sqrt{2}.$$ 17 r°.

* ضلع ستة عشر وستة عشر هو مال مال فى
ضلع احد وثمانين واحد وثمانون هو مال مال

** Comparer Euclide, *Eléments*, VII, déf. 21, et IX, prop. 1.

La preuve de la justesse de ce procédé, c'est que $(a+b)^2=2ab+(a^2+b^2)$, et que $2\sqrt{\alpha.\beta}=2\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}$.

Si, au lieu de l'une des deux racines, on a le multiple d'une racine, on le remplace par la racine qui lui est égale, et procède comme auparavant.

D. ADDITION DES RACINES SUPÉRIEURES.

17 v°.

$$\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{8.8.27}+3\sqrt[3]{27.27.8}+27+8}$$
$$=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{1728}+3\sqrt[3]{5832}+27+8}$$
$$=\sqrt[3]{36+54+27+8}=\sqrt[3]{125}.$$

Ce procédé ne s'applique qu'à deux nombres jouissant de la propriété que le carré de chacun d'eux, multiplié par l'autre, produit un nombre cube.

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2.2.54}+3\sqrt[3]{54.54.2}+2+54}$$
$$=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{216}+3\sqrt[3]{5832}+2+54}$$
$$=\sqrt[3]{18+54+2+54}=\sqrt[3]{128}.$$

$$\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{(3\sqrt[3]{8.8.27}+27)-(3\sqrt[3]{27.27.8}+8)}$$
$$=\sqrt[3]{(36+27)-(54+8)}=\sqrt[3]{63-62}=\sqrt[3]{1}.$$

18 r°.

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(3\sqrt[3]{2.2.54}+54)-(3\sqrt[3]{54.54.2}+2)}$$
$$=\sqrt[3]{(3\sqrt[3]{216}+54)-(3\sqrt[3]{5832}+2)}$$
$$=\sqrt[3]{(18+54)-(54+2)}=\sqrt[3]{72-56}=\sqrt[3]{16}.$$

La démonstration consiste en ce que $(a+b)^3=a^2.a+b^2.b+3a^2.b+3b^2.a$.
18 v°. L'auteur explique ce théorème en multipliant tout au long $(2+3)$ par $(2+3)$ par $(2+3)$; puis il additionne $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{54}$, en formant l'expression $\sqrt[3]{2}.(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{54}.(\sqrt[3]{54})^2+3\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{54}.\sqrt[3]{54}.\sqrt[3]{2}=2+54+3\sqrt[3]{2.2.54}$
19 r°. $+3\sqrt[3]{54.54.2}$ ou $2+54+\sqrt[3]{27.2.2.54}+\sqrt[3]{27.2.54.54}$, ce qui, dit-il, revient à ce qu'il a exposé au commencement de ce paragraphe.

E. SOUSTRACTION DES RACINES (اسقاط الاضلاع بعضها من بعض)*.

L'auteur commence par énoncer le théorème $(a-b)^2=(a^2+b^2)-2ab$; il en donne l'exemple $(3-2)^2=(9+4)-(6+6)$; puis il explique que, pour former le cube (اذا اردت ان تكعّب) de $(3-2)$, il faut multiplier le résultat précédemment obtenu, à savoir $(9+4)-(6+6)$, encore une fois par $(3-2)$. Après avoir terminé cette opération, il en fait l'application à la construction 19 r°.
de $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}$, en formant de la manière suivante l'expression qui se trouve sous le signe radical :

$$\{(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2})\cdot(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2})\}\cdot(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2})$$

$$=\{(\sqrt[3]{54})^2+(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{108}\}\cdot(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2})$$

$$=\{(\sqrt[3]{54})^2\cdot\sqrt[3]{54}\}+\{(\sqrt[3]{54})^2\cdot(-\sqrt[3]{2})\}+\{(\sqrt[3]{2})^2\cdot\sqrt[3]{54}\}+\{(\sqrt[3]{2})^2\cdot(-\sqrt[3]{2})\}$$

$$+\{(-\sqrt[3]{108})\cdot\sqrt[3]{54}\}+\{(-\sqrt[3]{108})\cdot(-\sqrt[3]{2})\}+\{(-\sqrt[3]{108})\cdot\sqrt[3]{54}\}+\{(-\sqrt[3]{108})\cdot(-\sqrt[3]{2})\}$$

$$=54-\sqrt[3]{5832}+\sqrt[3]{216}-2-\sqrt[3]{5832}+\sqrt[3]{216}-\sqrt[3]{5832}+\sqrt[3]{216}$$

$$=(54+3\sqrt[3]{216})-(2+3\sqrt[3]{5832}).$$

X. THÉORÈMES UTILES DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES AU MOYEN DE L'ALGÈBRE** 20 r°.
(مما يعين على استخراج المسائل بالجبر والمقابلة).

Théorème. $1+2+3+4+\ldots+10=\frac{10\cdot 10+10}{2}$, ou bien $=(1+10)\cdot\frac{10}{2}$.

Si on prend les termes de la suite des nombres naturels de deux en deux, la somme sera encore égale à la somme du premier et du dernier terme, multipliée par la moitié du nombre des termes***.

L'auteur démontre ces procédés en expliquant que chaque nombre est la moitié de la somme de deux nombres pris à distances égales de chaque côté de ce nombre; que dans la suite $1+2+3+\ldots+10$, en ajoutant chaque 20 v°.

* On a remarqué, sans doute, que l'auteur a traité ce sujet déjà dans les deux paragraphes précédents; aussi ne donne-t-il dans celui-ci rien d'essentiellement nouveau.

** Ce chapitre traite de la sommation de différentes suites. Le titre que l'auteur lui donne s'explique par l'emploi qu'Alkarkhî fait des théorèmes de ce chapitre, dans les problèmes qui se trouvent au commencement de la IIe section de son recueil.

*** نصف العدد المأخوذ اليه.

nombre au nombre correspondant à partir des deux extrémités, on obtient la somme 11 cinq fois, c'est-à-dire la moitié de fois du nombre de termes. Il fait observer que cela vaut également pour les suites dont la différence constante (الزيادة) n'est pas l'unité.

Pour déterminer la somme des 20 premiers termes de la suite

$$3 + 7 + 11 + 15 + \ldots.$$

on trouve d'abord le dernier terme $= 19 \cdot 4 + 3 = 79$, puis on forme l'expression $(79 + 3)\frac{20}{2} = 820$, ce qui est la somme demandée.

21 r°. Trouver la somme des nombres pairs ou impairs depuis 1 jusqu'à 10 revient à trouver la somme des 5 premiers termes de la suite qui a pour différence constante 2, et pour premier terme 2 ou 1 respectivement.

Théorème. $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = (1 + 10) \cdot 10 \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{6}\right) = 110 \cdot 3\frac{1}{2} = 385,$

ou bien $= (1 + 2 + 3 + \ldots + 10)\left(\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3}\right).$

L'auteur avoue qu'il n'a pas réussi à trouver la démonstration de ce théorème, et qu'il a seulement observé qu'on obtient toujours

21 v°. $$(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) : (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}.$$

Mais il promet d'en donner un autre qu'il démontrera et qui sera fondé sur le théorème que voici :

$$5^2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \ldots + 1 \cdot 9 = 5^3 - \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (5 - 1)^2\}$$

L'auteur démontre ce dernier théorème en expliquant que $(a - n)(a + n)$

22 r°. $= a^2 - n^2$. Puis il trouve la somme de la suite $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ en formant successivement les expressions

$$\{(1 + 10) \cdot \tfrac{10}{2}\} \cdot 10 = 550,$$

$$10 - 1 = 9,\quad 9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + \ldots + 6 \cdot 4 + 5^2 = 95,$$

$$95 - 5^2 = 70,\quad 550 - (95 + 70) = 385\ ^*.$$

* C'est-à-dire $(1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) = (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \cdot 10 - \{2(1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + \ldots + 4 \cdot 6 + 5^2) - 5^2\}.$ On voit aisément comment l'auteur a été conduit à ce théorème. On a

$(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \cdot 10$
$= 1(1 + 9) + 2(2 + 8) + 3(3 + 7) + \ldots + 7(7 + 3) + 8(8 + 2) + 9(9 + 1) + 10 \cdot 10$
$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2 + 10^2) + (1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6) \cdot 2 + 5 \cdot 5$
$= (1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) + 2\{1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + \ldots + 4 \cdot 6 + 5^2\} - 5^2,$

donc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \cdot 10 - \{2 \cdot (1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + \ldots + 4 \cdot 6 + 5^2) - 5^2\}.$

La détermination de la somme de la suite des nombres carrés au moyen de ce théorème a

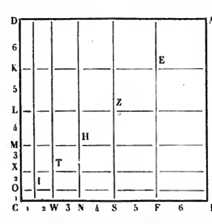
Théorème. $6.5+7.4+8.3+\ldots=6.5.5-\{1.2+2.3+\ldots+4.5\}$
$=6.5.5-\{(1+2+\ldots+5)\frac{2}{3}(5-1)\}=150-40=110.$

L'auteur démontre ce théorème en expliquant que

$$\{(a+1)+n\}.\{a-n\}=(a+1)a-n(n+1).$$

Théorème. $1.2+2.3+3.4+\ldots+9.10=(1+2+3+4+\ldots+10)(\frac{2}{3}.10-\frac{2}{3})$ 22 v°.
$=330$ *.

Théorème. $1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3=(1+2+3+\ldots+10)^2.$



DÉMONSTRATION.

$(1+2+3+\ldots+10)=55=45+10,$

$(45+10)^2=45^2+2.10.45+10^2$
$=45^2+10^3,$

$45^2=(36+9)^2=36^2+2.9.36+9^2$
$=36^3+9^3.$

$36^2=(28+8)^2=28^2+2.8.28+8^2$
$=28^2+8^3.$

En continuant ainsi on vérifie le théorème. Et de même, on a 23 r°.
dans la figure ci contre :

$$DE+EA+EB=6^3,$$

à savoir, $EA=6.6$, $DE=EB=6.15=90$, $EA+DE+EB=216$.

La raison de cela c'est que 23 v°.

$$(a-1)a^2+a^2=a^3,$$

et que $(1+2+\ldots+n)(n+1).2+(n+1)^2=(n+1)^3.$

C'est ainsi qu'on a

$$KZ+ZE+ZF=\overline{KL}^3,\quad LH+HZ+HS=\overline{LM}^3,\quad MT+TH+TN=\overline{MX}^3,$$

l'air d'un cercle, mais elle ne l'est pas; car pour trouver la somme des carrés jusqu'à 10^2, l'auteur ne suppose connue, dans son théorème auxiliaire, que la somme des carrés jusqu'à 4^2; c'est une espèce de formule de réduction. Quant à la démonstration du théorème actuel promise par l'auteur, il faut croire qu'il la réservait à son commentaire.

* Voici comment l'auteur est probablement arrivé à ce théorème. Il avait

$1.2+2.3+3.4+\ldots+9.10$
$=(1^2-1)+(2^2-2)+(3^2-3)+(4^2-4)$
$+\ldots+(10^2-10)$
$(1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2)-(1+2$
$+3+\ldots+10)$
$(1+2+3+\ldots+10)\{(\frac{2}{3}10+\frac{1}{3})-1\}.$

$$XI + IT + IW = \overline{XO}^3, \quad \text{enfin } IC = \overline{OC}^3;$$

donc $AC = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 6^3$, c. q. f. d.

Théorème. $(1.3 + 3.5 + \ldots + 7.9) + (2.4 + 4.6 + \ldots + 8.10)$

24 r°. $= (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \cdot \left(\frac{2 \cdot 10}{3} - 1\frac{2}{3}\right) + 1$

$$= 55\left(\frac{2 \cdot 10}{3} - 1\frac{2}{3}\right) + 1 = 275 + 1 = 276.$$

Démonstration : $(1.3 + 3.5 + \ldots + 7.9) + (2.4 + 4.6 + \ldots + 8.10)$

$$= (3^2 - 2.3 + 5^2 - 2.5 + \ldots + 9^2 - 2.9) + (4^2 - 2.4 + 6^2 - 2.6 + \ldots + 10^2 - 2.10)$$

$$= (3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + 10^2) - 2(3 + 4 + 5 + \ldots + 10);$$

mais $55\left(\frac{2 \cdot 10}{3} - 1\frac{2}{3}\right) = (1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) - 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 10)$

et $1^2 + 2^2 - 2(1 + 2) = -1$, ce qui fait qu'il faut ajouter 1 au produit $55\left(\frac{2 \cdot 10}{3} - 1\frac{2}{3}\right)$.

Théorème. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + 8.9.10$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \overline{10 - 1}^3 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 - 1)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 9)^2 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 45^2 - 45,$$

ou bien $= 45.44 = 1980$.

24 v°. La raison de cela c'est que $(n - 1)n(n + 1) = n^3 - n$.

XI. THÉORÈMES DONT LA CONNAISSANCE SERT À RÉSOUDRE LES DIFFICULTÉS (مما يستعان بمعرفته على اخراج الشكل).

$$\left\{\left(\frac{a^2 - b^2}{a - b}\right) + (a - b)\right\} : 2 = a, \qquad \left\{\frac{a^2 - b^2}{a - b} - (a - b)\right\} : 2 = b;$$

l'auteur ajoute que ce théorème s'appelle المساواة « l'égalité *. »

* A savoir, l'égalité double, puisque c'est sur cette formule qu'est fondée la résolution de l'égalité double à la manière de Diophante. Aussi trouve-t-on en plusieurs endroits de ce recueil de problèmes, cette dernière expression en entier المساواة المثنّاة.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).a.b=a^2+b^2. \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1, \quad \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right).a.b=a^2-b^2.$$ 25 r°.

$$am+bm+cm+\ldots=(a+b+c+\ldots)m.$$

$$ab+\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ ou } ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

l'auteur fait observer que ce théorème est donné implicitement par Euclide*. 25 v°.

$$(a+b).b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2.$$

$(ma)^2+a^2\pm 2(ma).a$ sont des nombres carrés;

l'auteur ajoute que ce théorème est fondé sur la proposition d'Euclide, *Éléments*, II, 4. 26 r°.

$a^2+(2a+1)$ et $a^2-(2a-1)$ sont des nombres carrés.

$$a+\left\{n\sqrt{a}+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right\}=\left(\sqrt{a}+\frac{n}{2}\right)^2, \quad a-\left\{n\sqrt{a}-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right\}=\left(\sqrt{a}-\frac{n}{2}\right)^2.$$

En supposant $a=m.n$**,

$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+a$ et $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a$ sont des nombres carrés, à savoir,

$$\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a}=\frac{m-n}{2} \text{ et } \sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+a}=\frac{m+n}{2}.$$ 26 v°.

XII. DES SIX PROBLÈMES.

L'auteur explique que le but de l'algèbre c'est la détermination des inconnues au moyen de prémisses connues; qu'on nomme le sujet (اصل) du problème « chose, » et qu'on le soumet aux opérations enseignées dans les chapitres précédents de ce traité, conformément à ce qu'en porte l'énoncé du problème; après quoi on procède au جبر et à la مقابلة. L'auteur définit ces termes de la manière suivante : 27 r°.

« Le *djabr* c'est qu'on trouve des termes négatifs dans les deux aggrégats opposés l'un à l'autre, ou dans l'un d'eux, qu'on les restitue par leurs équivalents, et qu'on ajoute à l'autre aggrégat l'équivalent des quantités au moyen

* Voir *Éléments*, II, 5. — ** عددٌ بعدّة عددٌ بعددٍ آخر

desquelles on a restitué l'aggrégat opposé [*], afin que l'égalité des deux aggrégats soit conservée; puis qu'on retranche les quantités égales du même ordre des deux côtés d'une manière égale. »

« La *mokâbalah* c'est qu'on obtient [**] un aggrégat, formé par un seul terme ou par deux termes (d'ordres différents), qui est égal à un autre aggrégat d'un terme ou de deux termes, par exemple : Des choses sont égales à un nombre, et : Des choses sont égales à des carrés, et : Des carrés sont égaux à un nombre. Ces trois espèces sont appelées *les équations simples* (المفردات), parce qu'un seul terme simple est égalé à un seul terme simple. Lorsque deux termes (d'ordres différents) sont égalés à un seul terme (le problème) s'appelle *composé* (مقترن); il y en a trois cas. »

Note. La suppression des quantités égales qui se trouvent dans les deux membres de l'équation, est ce que les algébristes arabes désignent ordinairement par le nom de mokâbalah [***]; elle est comprise ici dans l'opération du djabr, et la mokâbalah n'est ici que l'action d'opposer l'un à l'autre, en les égalant, les deux membres de l'équation. Aussi, dans le cours de l'ouvrage, la suppression des quantités égales est désignée souvent séparément par les expressions إلقاء الاشياء المتجانسة ou إلقاء المقادير المشتركة, mais jamais par le terme mokâbalah.

1. PROBLÈMES SIMPLES.

1. $ax = b \ldots\ldots x = \frac{b}{a}.$

27 v°. 2. $ax^2 = bx \ldots\ldots x = \frac{b}{a}.$

L'auteur fait observer qu'une des opérations essentielles de l'algèbre (شروط الجبر والمقابلة) est la réduction des carrés à un seul carré. Cette opération s'appelle الردّ lorsque le nombre des carrés est plus grand que l'unité, et الاكمال lorsqu'il est une fraction de l'unité.

28 r°. 3. $ax^2 = b \ldots\ldots x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$

[*] L'algébriste arabe considère les termes négatifs qui se trouvent dans un aggrégat de termes, comme une lacune qu'il faut combler, pour restituer (جبر) l'intégrité de l'aggrégat.

[**] Le ms. porte يجى « il vient »; peut-être la leçon véritable est تجد « tu trouves » comme dans la définition du djabr.

[***] Voir Rosen, *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, pag. 177-186.

B. PROBLÈMES COMPOSÉS. 28 v°.

4. $$ax^2 + bx = c.$$

$$x = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \left(\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\right).$$

ou bien $$x = \left\{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right\} : a.$$ 29 r°.

Pour obtenir directement le carré de l'inconnue, on ramènera d'abord 29 v°.
l'équation à la forme $x^2 + bx = c$, et l'on aura

$$x^2 = \frac{b^2}{2} + c - \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 + b^2c}.$$

Démonstration de la résolution lorsque l'équation renferme un seul carré complet.

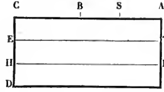
Qu'on ait à résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ *.

C B D A

Posons $BC = x$, $AB = 10$, et prenons le point milieu D de AB. Conformément à la proposition connue d'Euclide **, on aura $AC \cdot CB + \overline{DB}^2 = \overline{DC}^2$; mais 30 r°.
$AC \cdot BC = (x + 10)x = 39$ et $DB = 5$; conséquemment, $64 = \overline{DC}^2$ et $\sqrt{64} = DC$, ou $8 = 5 + BC$; il reste donc $3 = BC = x$.

Démonstration de la résolution sans réduction préalable des carrés à un seul carré.

1° Que l'équation proposée soit $3x^2 + 6x = 24$.



Posons $BC = 3x$, $AB = 6$, prenons le point milieu S de AB, faisons $CD = BC$, et divisons CD en E et H, de sorte que chacune des parties soit $= x$; enfin menons ET, HI parallèles à BC. On aura $AE = AC \cdot CE = 3x^2 + 6x = 24$, donc $AD = 72$; mais $AD = AC \cdot CD$ 30 v°.

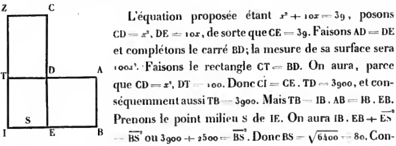
* Je fais observer que cette équation se trouve avec les mêmes coefficients dans l'algèbre de Mohammed Ben Moûçâ (p. 8 et 13 de la trad. de Rosen), dans l'algèbre d'Alkayyâmi (p. 17 de ma traduction) et chez Fibonacci (dans Libri, *Hist. des sciences mathématiques en Italie*, t. II, p. 359).

** *Éléments*, II, 6.

$= AC \cdot BC$; en même temps $\overline{SB}^2 = 9$. Donc $AC \cdot BC + \overline{SB}^2 = 81$. Conséquemment $SC = \sqrt{81} = 9$. Mais $SC = BC + SB = BC + 3$. Donc $6 = BC = 3x$, donc $x = 2$.

2° Le carré étant incomplet, comme dans l'équation $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 6$, on pose $AB = \frac{1}{2}x$, $BD = 2$, $AI = x$. Faisons $AS = AB = \frac{1}{2}AI$, menons ST parallèle à AD, et prenons le point milieu C de BD. On aura $AZ = AD \cdot AI = (\frac{1}{2}x + 2)x = \frac{1}{2}x^2 + 2x = 6$, et $SD = \frac{1}{2}AZ = 3$. Mais $SD = AS \cdot AD = AB \cdot AD$; donc $AB \cdot AD = 3$. Et $DA \cdot AB + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$; conséquemment
31 r°. $\overline{AC}^2 = 3 + 1 = 4$ et $AC = 2$; mais $BC = 1$, donc $AB = 1$ et $x = 2$.

Démonstration de la résolution qui donne directement le carré de l'inconnue.



L'équation proposée étant $x^2 + 10x = 39$, posons $CD = x^2$, $DE = 10x$, de sorte que $CE = 39$. Faisons $AD = DE$ et complétons le carré BD; la mesure de sa surface sera $100x^2$. Faisons le rectangle $CT = BD$. On aura, parce que $CD = x^2$, $DT = 100$. Donc $CI = CE \cdot TD = 3900$, et conséquemment aussi $TB = 3900$. Mais $TB = IB \cdot AB = IB \cdot EB$. Prenons le point milieu S de IE. On aura $IB \cdot EB + \overline{ES}^2 = \overline{BS}^2$ ou $3900 + 2500 = \overline{BS}^2$. Donc $BS = \sqrt{6400} = 80$. Con-
31 v°. séquemment $DE + ES = 80$; mais $ES = 50$, donc $DE = 30$. Or, on avait $CE = 39$, conséquemment $CD = 9$, ou $x^2 = 9$.

Résolution à la manière de Diophante

(على طريق ديوفنطس ou على مذهب ديوفنطس).

L'équation proposée étant $x^2 + 10x = 39$, on cherche un nombre qui, ajouté à $x^2 + 10x$, produit un nombre carré. On n'en trouve d'autre que 25, et l'on aura $x^2 + 10x + 25$ ou $(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$, donc $x + 5 = \sqrt{64} = 8$ et $x = 3$.

5. $ax^2 + c = bx$.

$$x = \frac{1}{2}\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Lorsqu'on ne peut pas retrancher $\frac{c}{a}$ de $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$, le problème est absurde; et lorsque $\frac{c}{a}=\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ on a $x=\frac{1}{2}\frac{b}{a}$. 32 r°.

Sans réduction du nombre des carrés, on aura

$$x=\left\{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}\right\} : a.$$

Pour obtenir directement le carré de l'inconnue, l'équation proposée étant $x^2+c=bx$, on a 32 v°.

$$x^2=\left\{\frac{b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c}\right\} - c.$$

Suivent quatre démonstrations absolument analogues à celles proposées ci-dessus pour l'équation $ax^2+bx=c$, et qui n'offrent rien de remarquable, si ce n'est que l'auteur ne démontre jamais que l'un des deux cas de la formule, à savoir, le second. J'analyserai ces démonstrations ci-dessous. 32 v°. 34 r°.

Note. Dans le recueil de problèmes, les problèmes qui dépendent d'une équation du second degré, appartiennent en majeure partie à cette espèce. Il n'y a que trois problèmes, à savoir, III, 8, 10, 18, où l'auteur énonce formellement les deux solutions. Si cependant, dans tous les autres problèmes de cette espèce, l'auteur ne donne qu'une seule des deux solutions, ce n'est pas toujours qu'il ait simplement négligé l'autre. Dans les problèmes II, 40, 49; III, 11, 14, 15, 16, 19; IV, 15, 25, il s'agit de trouver les valeurs de deux inconnues, et la seconde solution de l'équation du second degré aurait conduit à une valeur négative pour l'une de ces inconnues. Dans les problèmes II, 19, 34; III, 21, on part d'une relation algébrique renfermant un radical, et la seconde solution de l'équation du second degré correspond au cas du problème qu'on aurait obtenu en donnant à ce radical le signe opposé. Au contraire, dans les problèmes II, 11, 44; III, 12, 13; IV, 20, la seconde solution négligée aurait également bien satisfait à la question proposée.

Résolution à la manière de Diophante. 34 r°.

Pour résoudre l'équation $x^2+21=10x$ *, on cherche un nombre carré tel

* Comparer, relativement à ces coefficients, l'algèbre de Mohammed Ben Moûçâ, p. 11 et 16 de la traduction de Rosen.

que si on retranche de [x^2 plus] ce nombre $10x$, il résulte un nombre carré. Posons ce carré égal à $(x-5)^2$ ou égal à $(5-x)^2$, ce qui donne $x^2+25-10x = x^2+25-(x^2+21) = 4$; donc $5-x$ ou $x-5=\sqrt{4}=2$, et conséquemment $x=3$, ou $x=7$.

34 v°. 6.

$$bx+c=ax^2,$$

$$x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}}+\frac{1}{2}\frac{b}{a}.$$

Pour obtenir directement le carré de l'inconnue, l'équation proposée étant

$$x^2=bx+c,$$

on a

$$x^2=\sqrt{b^2c+\left(\frac{b^2}{2}\right)^2}+\frac{b^2}{2}+c.$$

35 r°. Suivent quatre démonstrations analogues à celles proposées relativement
36 r°. aux deux espèces précédentes.

Note. Je n'ai pas reproduit ci-dessus les démonstrations relatives aux deux dernières espèces des équations du second degré. L'auteur y procède d'une manière spéciale qui, rendue avec exactitude, aurait empêché de voir quelle est proprement la marche suivie par lui. C'est pourquoi je vais proposer ces démonstrations sous une forme plus générale qui permettra de reconnaître la méthode de l'auteur, en faisant ressortir le parallélisme de ces constructions.

I. 1.

$$x^2+bx=c.$$

$$AC.BC+\overline{BD}^2=\overline{CD}^2,$$

ou

$$(x+b)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2,$$

ou

$$c+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2;$$

donc

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}.$$

2.

$$ax^2+bx=c.$$

$$AC.BC+\overline{BD}^2=\overline{CD}^2,$$

ou

$$(ax+b)ax+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2;$$

donc

$$x=\left\{\sqrt{a.c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}\right\}:a.$$

Seulement, au lieu de dire directement que

$$AC \cdot BC = (ax+b) \cdot ax = \{(ax+b) \cdot x\} \cdot a = c \cdot a,$$

l'auteur arrive à ce résultat par une considération géométrique, en construisant d'abord un rectangle $AN = (ax+b) \cdot x = c$, puis un rectangle AM égal à a fois AN et égal aussi à $AC \cdot BC$, de sorte que $AC \cdot BC = ac$.

L'auteur distingue, pour chacune des trois espèces, le cas de a fractionnaire, par une démonstration particulière; mais cela ne change, en effet, que la figure, en ce que AM sera une partie de AN, tandis que dans la figure actuelle, AN est une partie de AM.

3. $x^2 + bx = c.$



Posons $FE = x^2$, $EB = bx$,

$EG = \text{carré } EC = b^2x^2$.

On aura $FB = c$, $FG = b^2$,

et $AC \cdot BC = AH = AF = b^2 \cdot c$.

Mais $AC \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2$;

donc $\sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} = CD = BD + BC = BD + (BF - FE) = \frac{b^2}{2} + c - x^2;$

conséquemment $x^2 = \frac{b^2}{2} + c - \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2}.$

II. 1. $x^2 + c = bx.$

$AC \cdot BC + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2,$

ou $(b-x)x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, ou $c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2;$

donc $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$

2. $ax^2 + c = bx.$

$AC \cdot BC + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2,$

ou $(b - ax) \cdot ax + \left(\frac{b}{2} - ax\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

et $$(b - ax) \cdot ax = ac;$$

donc $$x = \left\{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}\right\} : a.$$

Et pour démontrer que $AC \cdot BC = ac$, l'auteur construit d'abord $CN = (b - ax)x = c$, puis $CM = a \cdot CN$ et $= AC \cdot BC$.

3. $$x^2 + c = bx.$$

Posons $FE = x^2$, $FB = c$, $EG =$ carré EC.

On aura $BE = bx$, $CE = b^2x^2$, $FG = b^2$.

et $$AC \cdot BC = AH = AF = b^2 \cdot c.$$

Mais $$AC \cdot BC + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2;$$

donc $$\sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c} = CD = BD - BC = BD - (BF + FE) = \frac{b^2}{2} - c - x^2,$$

conséquemment $$x^2 = \frac{b^2}{2} - c - \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c}.$$

III. 1. $$x^2 = bx + c.$$

$$AC \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2,$$

ou $$(x - b)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2, \text{ ou } c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2;$$

donc $$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}.$$

2. $$ax^2 = bx + c.$$

$$AC \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2,$$

ou $$(ax - b)ax + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(ax - \frac{b}{2}\right)$$

et $$(ax - b)ax = ac;$$

donc $$x = \left\{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}\right\} : a.$$

Et pour démontrer que $AC \cdot BC = ac$, l'auteur construit d'abord $AN = (ax - b)x = c$, puis $AM = a \cdot AN$ et $= AC \cdot BC$.

3. $$x^2 = bx + c.$$

Posons $FE = x^2$, $FB = c$, $EG = \text{carré } EC$.

On aura $BE = bx$, $CE = b^2x^2$, $FG = b^2$,

et $$AC \cdot BC = AH = AF = b^2 \cdot c.$$

Mais $$AC \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2;$$

donc $\sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} = CD = BC - BD = (FE - BF) - BD$

$$= x^2 - c - \frac{b^2}{2},$$

conséquemment $$x^2 = \frac{b^2}{2} + c + \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2}.$$

XIII. ÉQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS. 36 r°.

L'auteur fait d'abord observer que le nombre des problèmes algébriques est illimité; puis il donne les règles suivantes :

1. Lorsqu'on a (une équation à) trois termes de degrés quelconques *, mais tels que (abstraction faite des coefficients) ces termes soient en proportion continue, on réduit d'abord tous les termes, de sorte que le terme de l'ordre le plus élevé (الذى هو ارفع رتبة) ait pour coefficient l'unité. Puis 36 v°. on prend le carré de la moitié (du coefficient) du terme (du degré) moyen (الواسطة). Lorsque ce terme ne forme pas à lui seul un membre de l'équation, on ajoute le susdit carré au nombre, et prend la racine de la somme. On retranche de cette racine la moitié du terme moyen, lorsque ce terme

* L'auteur sous-entend, sans le dire, que l'un des trois termes soit constant. Dans ce paragraphe, il résout directement les trois équations :

1. $ax^{2p} + bx^p = c \ldots x^p = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$,

2. $ax^{2p} = bx^p + c \ldots x^p = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$,

3. $ax^{2p} + c = bx^p \ldots x^p = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$.

Dans le second paragraphe, l'auteur explique que cette résolution de l'équation $ax^{2p} + bx^p + c = 0$, n'est, en effet, autre chose que celle de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Enfin, dans le 3e paragraphe, il ramène la résolution de l'équation $ax^{2p+q} + bx^{p+q} + cx^q = 0$ à celle de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

se trouve ensemble avec le terme du degré le plus élevé; on ajoute la racine à la moitié du terme moyen, lorsque ce terme se trouve ensemble avec le terme du degré le moins élevé (ادنى رتبة). Il résulte une unité du degré du terme moyen. Lorsque le terme du degré moyen se trouve seul dans un membre de l'équation, on prend le carré de la moitié (de son coefficient), et retranche de ce carré le (coefficient du) terme de l'ordre le moins élevé; puis on ajoute la racine de la différence à la moitié (du coefficient) du terme
37 r°. moyen, ou on l'en retranche. Exemples : $x^4+5x^2=126$; $x^4+24=10x^2$; $x^6=2x^3+8$.

2. Lorsqu'on a trois termes de degrés quelconques, dont deux (ensemble) sont égaux au troisième, qu'on peut mettre le terme moyen à la place de la racine, et le terme du degré le plus élevé à la place du carré, en laissant le nombre tel qu'il est : alors les règles données ci-dessus (chapitre XII) s'appliquent sans aucune difficulté, si ce n'est que la racine obtenue est en vérité une unité du degré qui était celui du terme moyen avant la transformation (نقل). Par exemple, l'équation proposée étant $x^4=3x^2+40$, on résout $x^2=3x+40$. Le critérium de la possibilité de la transformation, c'est que le terme moyen multiplié en lui-même soit (d'un degré) égal au (degré du) produit de l'un des deux autres termes par l'autre.

3. Lorsqu'on a (une équation à) trois termes dont celui de l'ordre le moins élevé (n'est pas un nombre simple, mais) est formé par des carrés, ou par une autre puissance, et que ces termes sont en proportion continue, alors on divise tous les termes par la quantité qui réduit le terme le moins élevé au nombre simple. Exemple : l'équation proposée étant $x^7=bx^5+cx^3$,
37 v°. on divise par x^3, et l'on obtient $x^4=bx^2+c$; on transforme cette dernière équation dans la suivante $x^2=bx+c$, ce qu'on résout suivant les règles données.

XIV. DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE (ذكر الاستقرآء).

« *L'istikrâ* dans le calcul, c'est qu'on vous propose un aggrégat formé par un, par deux ou par trois termes de degrés consécutifs, que cet aggrégat n'est pas un carré suivant les expressions de l'énoncé, mais qu'on sous-entend que c'est un carré et que vous désirez en connaître la racine *. »

* الاستقرآء فى الحساب ان تردّ عليك جملة من جنس او من جنسين او من ثلاثة اجناس متوالية وتكون تلك الجملة غير مربعة من جهة ما يدلّ عليه اللفظ وتكون فى المعنى مربعة وانت تريد ان تعرف جذرها

Exemple : $x^2 + 4x = y^2$. En vertu du chapitre sur l'extraction des racines, on sait qu'on ne peut pas extraire la racine de $x^2 + 4x$; on sait en même temps que cette racine doit être ce qui, multiplié en lui-même, peut être égalé (امكن ان يُقابَل) à $x^2 + 4x$, de telle sorte qu'après la restitution des quantités négatives et après la suppression des choses homogènes (بعد الجبر والقاء الاشياء المتجانسة)*, le problème se réduise à une égalité entre un seul terme et un seul terme, telle que $ax = b$, ou $ax^2 = bx$, ou $ax^2 = bx^2$. Dans l'exemple actuel, on posera $y = 2x$, donc $x^2 + 4x = 4x^2$, ce qui donne, après l'emploi des opérations algébriques, $x = 1\frac{1}{3}$, donc $x^2 + 4x = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}) + (5 + \frac{1}{3}) = 7\frac{1}{9}$, ce dont la racine est $2\frac{2}{3}$. 38 r°.

Les problèmes de ce genre admettent une pluralité de solutions. Ainsi on peut, dans l'exemple actuel, poser $y = nx$**, ou $y = x - 1$, ou $y = x - n$. En prenant $y = x - 1$, on aura $x^2 + 4x = x^2 + 1 - 2x$, donc $x = \frac{1}{6}$, et $x^2 + 4x = \frac{25}{36}$. On obtient ici la solution, parce que des trois termes qui résultent de la multiplication (de $x - 1$ en lui-même), un terme est supprimé comme se trouvant également dans les deux membres.

Il faut prendre garde, en choisissant la racine (y) par tâtonnement (بالاستقرآء), de ne pas la prendre de manière qu'après l'application des opérations algébriques, on arrive à une égalité entre un terme et un autre terme dont les degrés ne se suivent pas immédiatement, ni de manière qu'on arrive à une égalité entre un terme et deux termes, comme si, par exemple, on arrivait aux équations $x^2 = 10$, $x^2 + 2x = 10$.

Lorsque l'expression proposée est composée de trois termes, il est nécessaire que le terme des carrés, ou le nombre, soit, pris isolément, un carré positif, non pas négatif, afin que, lorsqu'on multiplie la racine (y) par elle- 38 v°.
même, il puisse résulter un terme égal, soit aux carrés, soit au nombre, et qu'on puisse supprimer ce terme dans les deux membres.

Exemple : $4x^2 + 16x + 9 = y^2$. On pose $y = 2x - n$, en prenant n de sorte que $n^2 > 9$. Posons, par exemple, $y = 2x - 5$; on aura $y^2 = 4x^2 + 25 - 20x = 4x^2 + 16x + 9$, donc $36x = 16$. On a posé *deux* x pour obtenir, en multipliant y en lui-même, *quatre* x^2, afin qu'on puisse supprimer $4x^2$ dans les deux membres, et qu'on arrive à une égalité entre des choses et un nombre.

On peut aussi poser $y = 3 - nx$, en choisissant n de telle sorte que $n^2 > 4$.

* Comparer chapitre XII, p. 63 et 64. — ** Textuellement : une quantité quelconque de choses (ما شئت من الاشياء).

Posons, par exemple, $y = 3 - 3x$; on aura $y^2 = 9x^2 + 9 - 18x = 4x^2 + 16x + 9$, donc $5x^2 = 34x$.

Exemples d'expressions dont on ne peut pas trouver la racine : $10x - (x^2 + 1)$, $2x^2 + 10x + 10$, $10x - x^2 - 5$ *.

Exemples de cas résolubles : $2x^2 + 10x$, $10x - 2x^2$, $2x^2 - 10x$; car en posant
391°. $y = 2x$, on obtiendra la solution.

En terminant ce chapitre, l'auteur s'exprime de la manière suivante : « Ceci doit suffire en cet endroit; mais, certainement, je ferai mention, dans le commentaire de mon ouvrage, de ce qui concerne les cubes, les carré-carrés, et les ordres suivants. J'ai aussi composé un ouvrage qui traite, d'une manière développée, de la méthode de l'*istikrâ* en particulier **. »

XV. CAS PARTICULIERS DE LA RÉDUCTION DES CARRÉS

(ذكر ما يقع نادرًا من الاكمال والردّ).

Lorsqu'on veut reduire $3 + \sqrt{5}$ à l'unité ***, on cherchera le nombre qui, multiplié en $3 + \sqrt{5}$, produit l'unité. On posera $x(3 + \sqrt{5}) = 1$, ou $3x + \sqrt{5x^2} = 1$, donc $5x^2 = (1 - 3x)^2 = 1 + 9x^2 - 6x$. On appliquera les opérations algébriques, et résoudra l'équation. La valeur trouvée pour x est le nombre par lequel il faut multiplier $3 + \sqrt{5}$ pour obtenir l'unité. On procédera d'une manière analogue, lorsque le coefficient du carré est fractionnaire, comme dans les expressions suivantes : $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{6x^2}$, $\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{\frac{1}{3}x^2}$.

* Les deux premières expressions ne peuvent réellement pas avoir de racines rationnelles, parce que les formules $6t^2 - u^2$ et $5t^2 + 2u^2$ ne peuvent pas être des carrés. Au contraire, $10x - x^2 - 5$ peut devenir un carré, ce qu'on voit en posant $x = 7$, ou $x = 3$; et l'auteur lui-même résout des expressions de ce genre, ainsi que je l'ai fait remarquer ci-dessus p. 8 et 14.

** وهذا كاف فى هذا الموضع وسنذكر ما يتعلق بالمكعبات واموال الاموال وما يتركب بعد ذلك فى شرح كتابنا ان شاء الله وقد الفت فى الاستقراء بالمترى كتابا مستقصى

*** A savoir lorsque, en ramenant l'énoncé d'un problème à son expression algébrique, on arrive à une équation telle que $3x^2 + \sqrt{5x^2} = bx + c$, et qu'on désire réduire cette équation à la forme canonique $x^2 = mx + n$.

II.

RECUEIL DE PROBLÈMES.

PREMIÈRE SECTION. 39 r°.

(1) $$2x + 5 = 20.$$

$$x = 7\tfrac{1}{2}.$$

(2) $$x - \left(\frac{x}{3} + 3\right) = 20.$$

$$x = 34\tfrac{1}{2}.$$

(3) $$2(2x - 1) - 1 = 10.$$

$$x = 3\tfrac{1}{4}.$$

(4) $$\left(x + \frac{x}{2} + 4\right) + \frac{x + \frac{x}{2} + 4}{2} + 4 = 20.$$

$$x = 4\tfrac{4}{9}.$$ 40 r°.

(5) $$\left(x - \frac{x}{2} - 3\right) - \frac{x - \frac{x}{2} - 3}{2} - 3 = 10.$$

$$x = 58.$$

(6) $$\left(x + \frac{x}{5} + 5\right) - \frac{x + \frac{x}{5} + 5}{3} - 5 = 0.$$

$$x = 2 + \frac{\frac{1}{6}}{2}.$$

(7) $$2\{2(2x - 10) - 10\} - 10 = 0.$$

$$x = 8 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}.$$ 40 v°.

(8) $$x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4}\right) = 10.$$

$$x = 24.$$

(9) $$\left(x-\frac{x}{3}\right)+\frac{x-\frac{x}{3}}{4}=10.$$

$$x=12.$$

(10) $$\left(x+\frac{x}{11}\right)-\left(\frac{x+\frac{x}{11}}{3}+\frac{x+\frac{x}{11}}{4}\right)=10.$$

$$x=22.$$

(11) $$x\,.\,x=4x.$$

$$x=4.$$

(12) $$x\,.\,\tfrac{2}{3}x=x.$$

$$x=1\tfrac{1}{2}.$$

(13) $$x\,.\,4x=25.$$

41 r°. $$x=\sqrt{6\tfrac{1}{4}}=2\tfrac{1}{2}.$$

(14) $$x=3\,.\,y,\qquad x\,.\,y=100.$$

$$3y^2=100,\qquad y=\sqrt{33\tfrac{1}{3}}.$$

(15) $$\frac{x}{4}=\sqrt{x}.$$

On pose $$x=x_1^2;$$

donc $$x_1^2=4x_1,\ x_1^2=16=x,\ \sqrt{x}=4.$$

(16) $$x+y=10,\qquad x=3y\ [*].$$

$$4y=10;\ y=2\tfrac{1}{2},\ x=7\tfrac{1}{2}.$$

(17) $$x+y=10,\qquad x-y=y.$$

$$x=2y,\ 3y=10;\ y=3\tfrac{1}{3},\ x=6\tfrac{2}{3}.$$

(18) $$x+y+z=10,\qquad x=2y,\qquad y=2z.$$

$$7z=10;\ z=1\tfrac{3}{7},\ y=2\tfrac{6}{7},\ x=5\tfrac{5}{7}.$$

41 v°. (19) $$x+y=10,\qquad 2x+4=y\ [**].$$

$$2x+4=10-x;\ x=2,\ y=8.$$

(20) $$x+y+z+t=10,\qquad x=\frac{y}{2},\qquad y=\frac{z}{3},\qquad z=\frac{t}{4}.$$

[*] Comparer Diophante, I, 2. — [**] Comparer Diophante, I, 3.

$$y = 2x,\ z = 6x,\ t = 24x;$$

$$33x = 10;\ x = \frac{10}{33},\ y = \frac{20}{33},\ z = 1\frac{27}{33},\ t = 7\frac{9}{33}.$$

(21) Un serviteur reçoit comme salaire d'un mois (de 30 jours) 40 dirhems et une bague, la bague représentant le salaire de 5 jours; quel est le prix (x) de la bague?

$$5x = 40; \quad x = 8.$$

(22) S'il reçoit comme salaire d'un mois 40 dirhems, une bague et un vêtement, ceux-ci représentant le salaire de 3 et de 6 jours respectivement; quel est le prix (x) de la bague, et celui ($2x$) du vêtement?

$$7x = 40;\ x = 5\frac{5}{7}.$$ 42 r°.

(23) $$x + \frac{x}{3} + \frac{x + \frac{x}{3}}{8} = 30.$$

$$x = 20.$$

(24) $$x + y = 10,\quad \frac{x}{y} = 1\frac{1}{5}.$$

$$\left(2\frac{1}{5}\right) \cdot y = 10;\ y = 4\frac{6}{11},\ x = 5\frac{5}{11}.$$

(25) $$x + \frac{y}{3} - \frac{x}{4} = y + \frac{x}{4} - \frac{y}{3}.$$

Posons $y = 3n$ *, disons $= 3$;

on aura $\frac{3}{4}x + 1 = 2 + \frac{x}{4},\ x = 2.$

(26) $$x + \frac{y}{5} = y + \frac{x}{4}.$$ 42 v°.

Posons $y = 5$;

on aura $x + 1 = 5 + \frac{x}{4},\ x = 5\frac{1}{3}.$

(27) $$x - \frac{x}{5} + \frac{y}{9} = y + \frac{x}{5} - \frac{y}{9}.$$

Posons $y = 9n$, disons $= 9$;

on aura $\frac{4}{5}x + 1 = 8 + \frac{x}{5},\ x = 11\frac{2}{3}.$

* Textuellement : « un nombre quelconque qui a un tiers. »

L'auteur ajoute : « et si l'on veut, on prendra le triple de chacune des deux quantités, afin de ne pas y avoir de fractions. » On aura donc

$$x = 35,\ y = 27.$$

(28) $$x - \frac{x}{3} + \frac{y + \frac{x}{3}}{8} = y + \frac{x}{3} - \frac{y + \frac{x}{3}}{8}.$$

Posons $x = 3n$, disons $= 3$;

43 r°. on aura $$2 + \frac{y+1}{8} = y + 1 - \frac{y+1}{8},\ y = 1\tfrac{2}{3}.$$

(29) $$x + 2 = y - 2.$$

Posons x égal à un nombre quelconque n et $y = n + 4$. Ou bien posons y égal à un nombre quelconque, disons $y = 10$;

on aura $$x + 2 = 8,\ x = 6.$$

(30) $$x + 1 = 2y.$$

Posons $x = 2$;

on aura $y = 1\tfrac{1}{2}$.

(31) $$4(x - 1) = y + 1.$$

Posons $y = 4$;

on aura $$4x - 4 = 5,\ x = 2\tfrac{1}{4}.$$

43 v°. (32) $$x + 1 = 2y,\quad y + 1 = 3x.$$

$$y + 1 = 3(2y - 1);\ y = \tfrac{4}{5},\ x = \tfrac{3}{5}.$$

(33) $$x + \frac{y}{3} = 3y,\ y + \frac{x}{4} = 2x.$$

$$x = (2\tfrac{2}{3})y,\ \frac{x}{4} = \tfrac{2}{3}y;$$

mais $y + \frac{x}{4} = (1\tfrac{2}{3})y$ n'est pas égal à $2x = (5\tfrac{1}{3})y$; le problème n'admet donc pas de solution *.

(34) $$x + \frac{y}{2} - \frac{x}{3} = y - \frac{y}{2} + \frac{x}{3}.$$

44 r°. Ce problème n'admet pas de solution **.

* Voir ci-dessus, p. 11. — ** *Ibidem.* On a $x = 0$ ou y quelconque.

(35) $$x + 3 = 10y, \qquad y + 2 = x.$$

$$x + 3 = 10x - 20;\ x = 2\tfrac{5}{9},\ y = \tfrac{5}{9}.$$

(36) $$x - y = 2, \qquad x \cdot y = 20.$$

$$y(y+2) = y^2 + 2y = 20;\ y = \sqrt{21} - 1,\ x = \sqrt{21} + 1.$$

L'auteur en fait la preuve (امتحان) en multipliant $(\sqrt{21} - 1)$ par $(\sqrt{21} + 1)$, ce qui donne, eu effet, 20.

(37) $$x = 4y, \qquad x \cdot y = 16.$$ 44 v°.

$$4y^2 = 16;\ y = \sqrt{4} = 2,\ x = 8.$$

(38) Un lingot d'or, pesant 5 mithkâl, contient de l'or à 30 dirhems le dinâr, et à 25 dirhems le dinâr; la valeur du lingot est de 120 dirhems; combien d'or contient-il de chaque sorte?

Posons x le poids de l'or à 30 dirhems; on aura

$$30x + 25(5 - x) = 120.$$

Mais cela devient absurde, à moins qu'on ne remplace 120 par 140. Alors on aura

$x = 3$ nithkâl, et le reste 2 mithkâl.

(39) $$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 10.$$

Posons $$\frac{x}{2} = x_1;$$

on aura $$x_1 + \frac{2x_1}{3} + \frac{x_1}{2} = 10,\ x_1 = 4\tfrac{8}{13};$$ 45 r°.

donc $$\frac{x}{2} = 4\tfrac{8}{13},\ \frac{x}{3} = 3\tfrac{1}{13},\ \frac{x}{4} = 2\tfrac{4}{13}.$$

(40) $$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 10.$$

Posons $$\frac{x}{3} = 2x_1;$$

on aura $$2x_1 + (1\tfrac{1}{2})x_1 + x_1 = 10,\ x_1 = 2\tfrac{2}{9};$$

$$\frac{x}{3} = 4\tfrac{4}{9},\ \frac{x}{4} = 3\tfrac{3}{9},\ \frac{x}{6} = 2\tfrac{2}{9}.$$

(41) $$\frac{x}{4}+\frac{x}{9}+\frac{x}{10}=10.$$

Prenons un nombre divisible par 4, 9, 10, disons 180, et posons $\frac{x}{4}=\frac{180}{4}x_1=45x_1$ etc.; on aura

45 v°. $$45x_1+20x_1+18x_1=10,\ x_1=\frac{10}{83};$$
$$\frac{x}{4}=5\frac{35}{83},\ \frac{x}{9}=2\frac{34}{83},\ \frac{x}{10}=2\frac{14}{83}.$$

(42) $$x+\frac{y}{3}=20,\qquad y+\frac{x}{4}=20.$$

$$y+\frac{20-\frac{y}{3}}{4}=20;\ y=16\frac{4}{11},\ x=14\frac{6}{11}.$$

(43) $$x+\frac{y}{3}+5=20,\ y+\frac{x}{4}+6=20.$$

46 r°. $$y+\frac{15-\frac{y}{3}}{4}+6=20;\ y=11\frac{2}{11},\ x=11\frac{3}{11}.$$

(44) D'une quantité de dattes $\frac{3}{5}$ reviennent au propriétaire et $\frac{2}{5}$ au cultivateur; le maître reçoit 7 djarib 5 kafîz de plus que le cultivateur. Quelle est la quantité totale (x) des dattes?

$$\tfrac{3}{5}x-\tfrac{2}{5}x=7\text{ d.}+5\text{ k.},\ x=35\text{ d.}+25\text{ k.}$$
$$\tfrac{2}{5}x=14\text{ d. }10\text{ k.},\ \tfrac{3}{5}x=21\text{ d. }15\text{ k.}$$

(45) De 100 djarib $\frac{3}{5}$ reviennent au propriétaire et $\frac{2}{5}$ au cultivateur. Le cultivateur en prend une certaine quantité (x), et le propriétaire le reste; puis le cultivateur rend au propriétaire $\frac{1}{4}$ de ce qu'il a pris, et le propriétaire rend au cultivateur $\frac{1}{5}$ de ce qu'il a pris, après quoi chacun a ce qui lui est dû. Qu'est-ce que chacun avait pris d'abord?

46 v°. On a $x-\frac{x}{4}+\frac{100-x}{5}=40$, ou bien $100-x-\frac{100-x}{5}+\frac{x}{4}=60$;

l'un et l'autre donnent $x=36\frac{4}{11}$.

Suit la preuve.

(46) Les mêmes choses étant supposées, le cultivateur rend 5 djarîb au propriétaire, après quoi chacun a ce qui lui est dû. Combien (x) le cultivateur avait il pris?

$$x-5=40;\ x=45.$$

(47) De 100 dirhems il revient à l'un de deux hommes 30 dirhems, à l'autre 70 dirhems. Le premier en prend une certaine quantité (x), et l'autre le reste; puis le premier rend un tiers de ce qu'il a pris, et le second un quart de ce qu'il a pris. De la somme des deux quantités rendues, le premier prend un tiers et le second le reste. Alors chacun a ce qui lui est dû.

On aura $x - \frac{x}{3} + \frac{\frac{x}{3} + \frac{100 - x}{4}}{3} = 30;\ x = 31\frac{1}{5}.$ 47 r°.

Suit la preuve.

(48) Il reste de la nuit (de 12 heures) $\frac{1}{4}$ de ce (x) qui en est passé, et $\frac{1}{2}$ de ce qui en reste *.

On aura $x + \frac{x}{2} = 12;$

donc $x = 8$ heures.

(49) Il reste de la nuit $\frac{1}{5}$ de ce qui en est passé, et $\frac{1}{4}$ de ce (x) qui en reste **. 47 v°.

On aura $12 - x = 3\frac{3}{4}x;\ x = 2\frac{10}{19}.$

Suit la preuve.

(50) $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 50.$

$$x = 8.$$

(51) $x + (x + 2) + (x + 4) + \ldots + (x + 18) = 100.$ 48 r°.

$$x = 1.$$

DEUXIÈME SECTION.

(1) $1 + 2 + 3 + \ldots + x = 210.$

$$\frac{x^2 + x}{2} = 210;\ x = 20.$$

(2) $3 + 5 + 7 + \ldots$ (x termes) $= 255.$

$$\left(3 + \{(x - 1) \cdot 2 + 3\}\right)\frac{x}{2} = 255,$$

$$x^2 + 2x = 255;\ x = 15.$$

* Comparer les épigrammes n[os] 9 et 32-35, Diophante, édit. de Bachet, p. 353 et 365-366. — ** *Ibidem.*

48v°. (3) $1 + 2 + 3 + \ldots = 10$ fois le nombre des termes.

$$\left(x + 1\right)\frac{x}{2} = 10x;\quad x = 19.$$

(4)
$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \ldots\ (x \text{ termes}) + \\ + 2 + 4 + 6 + \ldots\ (x \text{ termes}) \end{array}\right\} = 165.$$

$$\frac{x^2 + x}{2} + (2x + 2)\frac{x}{2} = 165;\quad x = 10.$$

(5) De deux messagers partis en même temps, le premier fait 10 parasanges chaque jour, le second successivement 1, 2, 3 parasanges, etc. En combien de jours atteindra-t-il le premier?

49r°. $$1 + 2 + 3 + \ldots + x = 10x;\quad x = 19.$$

(6) Si le premier fait 11 parasanges chaque jour, étant parti 5 jours avant le second, quand sera-t-il atteint par celui-ci?

$$\frac{x^2 + x}{2} = 11x + 55,\quad x^2 = 21x + 110;$$

$$x = \sqrt{220\tfrac{1}{4}} + 10\tfrac{1}{2}.$$

(7) Partis le même jour, ils font, l'un successivement 1, 3, 5... para-
49v°. sanges, l'autre 10 parasanges chaque jour. En combien de jours se rencontreront-ils?

$$x^2 = 10x;\quad x = 10.$$

(8) Les mêmes choses étant supposées, mais le premier faisant successivement 2, 4, 6 parasanges, on aura

$$x^2 + x = 10x;\quad x = 9.$$

(9) $10 + 15 + 20 + \ldots\ (x \text{ termes}) = 325.$

50r°. $$\left\{10 + (5x + 5)\right\}\frac{x}{2} = 325;\quad x = 10.$$

(10) On a le mithkâl à 5, à 7, et à 9 dirhems. On prend quelque chose de chaque sorte, en tout 1 mithkâl à 8 dirhems. Combien a-t-on pris de chaque sorte?

Posons ce qu'on a pris de la première sorte, et également ce qu'on a pris de la seconde, $= x$. On aura

$$12x + 9(1 - 2x) = 8;\quad x = \tfrac{1}{6}.$$

(11) On achète pour 20 dirhems de froment à 2 dirhems le kafîz, et pour 5 dirhems un certain nombre (x) de kafîz de millet à un prix inconnu. En vendant le froment au prix du millet, et le millet au prix du froment, on gagne 5 dirhems.

$$10 : (30 - 2x) = x : 5,$$ 50 v°.

$$x^2 + 25 = 15x;\ x = 7\tfrac{1}{2} - \sqrt{31\tfrac{1}{4}}.$$

(12) Un journalier reçoit 10 dirhems par mois, s'il travaille; mais s'il ne travaille pas, il est obligé de payer 6 dirhems par mois. Il a passé un mois de sorte qu'il ne reçoit ni ne doit rien. Combien (x) de jours a-t-il travaillé?

$$\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{5}(30 - x);\ x = 11\tfrac{1}{4}.$$

(13) S'il reçoit 4 dirhems à la fin du mois, combien de jours a-t-il travaillé?

$$\tfrac{1}{3}x = 4 + \tfrac{1}{5}(30 - x);\ x = 18 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}.$$

(14) S'il est obligé de rendre 2 dirhems, combien de jours a-t-il travaillé? 51 r°.

$$\tfrac{1}{3}x + 2 = \tfrac{1}{5}(30 - x);\ x = 7\tfrac{1}{2}.$$

(15) Trois fontaines versent de l'eau dans un réservoir; la première le remplit en 1 jour, la seconde en 2, et la troisième en 3 jours; toutes ensemble en quel temps?

$x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x = 1;\ x = \tfrac{6}{11}$ d'un jour.

(16) Toutes ensemble combien de fois le remplissent-elles en 5 jours?

$(5 + 2\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{2}{3})$ fois *.

(17) La nourriture de 10 pièces de bétail est de 400 par mois; de combien (x) est celle pour 3 pièces en 7 jours?

$$\tfrac{30}{7}x = \tfrac{3}{10} \cdot 400;\ x = 28.$$ 51 v°.

(18) La nourriture étant par mois cinq fois égale au nombre (x) des pièces, celle de 5 pièces a été, en 6 jours, un quart de leur nombre.

$$\tfrac{1}{24}x : 5 = \tfrac{1}{4}x : x;\ x = 20.$$

* Résolu sans calcul, par un simple raisonnement. Comparer, relativement aux énoncés de ce problème et du précédent, les épigrammes insérées par Bachet à la fin du V[e] livre de son édition de Diophante, n[os] 23-26, 28 et 43, p. 360-362, 363, 369. *Lilavati*, § 94.

(19) D'un certain nombre (x) de vêtements, le premier vaut 1 dirhem, le second 2, le troisième 3 dirhems, etc. La racine de leur prix total ajoutée à leur nombre donne 14.

52 r°. $$\sqrt{\frac{x^2+x}{2}}+x=14,\ x^2+392=57x;\ x=8.$$

(20) Un journalier reçoit par mois un salaire inconnu; ayant travaillé 5 jours, il reçut $1\frac{2}{3}$ de la racine de ce salaire.

$$30 : x = 5 : (1+\tfrac{2}{3})\sqrt{x};\ x=100.$$

(21) Un journalier reçoit un certain salaire pour un certain nombre de jours. Il a travaillé le quart de ce temps, et a reçu la racine de ce salaire.

En posant le salaire $=x^2$,

on aura $4x=x^2;\ x^2=16.$

Quant au nombre de jours, on pourra le poser égal à tout ce qu'on veut.

(22) $x^2+5=y^2.$

Posons $y=x+1,$

on aura $x^2+5=x^2+2x+1;$

donc $x=2,\ x^2=4.$

(23) $x^2-10=y^2.$

Posons $y=x-1,$

52 v°. on aura $x^2-10=x^2+1-2x;\ x=5\frac{1}{2},\ x^2=30\frac{1}{4}.$

(24) $x^2+5x=y^2.$

Posons $y=nx,$

disons $=3x;$

on aura $x^2+5x=9x^2;\ x=\frac{5}{8},\ x^2=\frac{25}{64}.$

(25) $x^2+5x+5=y^2.$

Posons $y=x-3,$

on aura $x^2+5x+5=x^2+9-6x;\ x=\frac{4}{11},\ x^2=\frac{16}{121}.$

(26) $x^2-(2x+2)=y^2.$

Posons $y=x-2,$

on aura $x^2-(2x+2)=x^2+4-4x;\ x=3,\ x^2=9.$

(27) $x - x^2 = y^2.$

Posons $y = nx,$

disons $= 2x;$

on aura $x - x^2 = 4x^2;\ x = \frac{1}{5},\ x^2 = \frac{1}{25}.$ 53r°.

(28) $x^2 + x = y^2, \quad x - x^2 = z^2.$

Résolvons d'abord $y_1 + x_1^2 = z_1^2,\ y_1 - x_1^2 = t_1^2.$

En posant $y_1 = 2x_1 + 1,$

on aura $y_1 + x_1^2$ égal à un nombre carré, et $y_1 - x_1^2 = 2x_1 + 1 - x_1^2 = t_1^2;$

posons $t_1 = 1 - x_1,$

on obtient $2x_1 + 1 - x_1^2 = x_1^2 + 1 - 2x_1;$

donc $x_1 = 2,\ x_1^2 = 4,\ y_1 = 5,\ t_1^2 = 1,\ z_1^2 = 9;$

puis on aura $x = \frac{4}{5},\ x^2 = \frac{16}{25}.$

(29) $x + y = 10,\ 20 + x = z^2,\ 50 - y = t^2$ *.

Posons $x = x_1^2 - 20,\ y = 30 - x_1^2,$

on aura $20 + x_1^2 = t^2.$

Il faut choisir t de sorte qu'on obtienne $x_1^2 > 20$ et $x_1^2 - 20 < 10$, ou 53v°. $4\frac{1}{2} < x_1 < 5\frac{1}{2}$ **; en conséquence, posons $t = x_1 - 11$; on aura

$$x_1^2 + 20 = x_1^2 + 121 - 22x_1,$$

$$x_1 = 4\tfrac{13}{22};\ x = (4\tfrac{13}{22})^2 - 20,\ y = 10 - \{(4\tfrac{13}{22})^2 - 20\}.$$

(30) $10 - x^2 = y^2,\ 30 - x^2 = z^2.$

Posons $x^2 = 10 - x_1^2,$

on aura $20 + x_1^2 = z^2;$

prenons z de telle sorte qu'il résulte $x_1^2 < 10$, disons $z = x_1 + 3$; on aura

$$20 + x_1^2 = x_1^2 + 6x_1 + 9,$$

$$x_1 = \tfrac{11}{6},\ x_1^2 = \tfrac{121}{36};\ x^2 = \tfrac{239}{36}.$$

* En substituant, dans la dernière de ces trois équations, la valeur de y tirée de la première, on a

$$20 + x = z^2, \quad 40 + x = t^2;$$

ainsi, le problème est réellement de la forme sous laquelle je l'ai placé p. 12, n° 2. On voit que la nouvelle variable x_1 introduite par l'auteur n'est antre chose que z.

** Cela équivaut à $20\frac{1}{4} < x_1^2 < 30\frac{1}{4}$ au lieu de $20 < x_1^2 < 30$.

(31) $x+10=y^2, \quad x+15=z^2.$

On a $y^2+5=z^2;$

54 r°. prenons z de telle sorte qu'on obtienne $y^2>10$, disons $z=y+\frac{2}{3}$; on aura

$$y^2+5=y^2+(1\tfrac{1}{3})y+\tfrac{4}{9},$$

$$y=3+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6},\ y^2=\tfrac{1681}{144};\ x=\tfrac{241}{144}.$$

(32) $x^2+4x=y^2, \quad x-x^2=z^2.$

Résolvons $4y_1+x_1^2=z_1^2,\ y_1-x_1^2=t_1^2.$

En posant $y_1=x_1+1,$

on aura $4y_1+x_1^2$ égal à un nombre carré,

et $y_1-x_1^2=x_1+1-x_1^2=t_1^2;$

posons $t_1=x_1-1;$

on obtient $x_1=1\frac{1}{2},\ x_1^2=2\frac{1}{4},\ y_1=2\frac{1}{2}.$

Enfin on aura $x=\dfrac{2\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}}=\frac{9}{10},\ x^2=\frac{81}{100}.$

(33) $10x-x^2=y^2.$

On posera $y=nx.$

(34) $\dfrac{10}{2+\sqrt{3}}=x.$

54 v°. $10-2x=\sqrt{3x^2},\ x^2+100=40x;\ x=20-\sqrt{300}.$

(35) $x(x+\sqrt{5})=10x$ *.

$$x=10-\sqrt{5}.$$

(36) $\sqrt{5x}\,.\,\sqrt{3x}+20=x^2$ **.

$$x=\sqrt{3+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}}+\sqrt{23+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}}.$$

(37) $\sqrt{3x}\,.\,\sqrt{4x}+5x+20=x^2$ ***.

$$x=(2\tfrac{1}{2}+\sqrt{3})+\sqrt{29\tfrac{1}{4}+\sqrt{75}}.$$

* Comparer Libri, *Hist. des sciences math. en Italie*, t. II, p. 403, l. 19.

** Comp. *ibid.* p. 406, l. 17.

*** Comp. *ibid.* p. 407, l. 20.

(38) $(x+5)\sqrt{5} = x.$ 55 r°.

On obtient $125 + 5x^2 + 50x = x^2$, ce qui est impossible; mais si le second membre de l'équation proposée était $3x$, on aurait $4x^2 = 125 + 50x$, ce qu'on résout selon la règle.

(39) $x + y = 10, \quad y^2 - \sqrt{8} \cdot x = 40$ *.

On aura $60 + x^2 = 20x + \sqrt{8x^2},$ 55 v°.

ce qu'on résout selon la règle.

(40) $x - y = 5, \quad \sqrt{x \cdot 10x} = y^2$ **.

$$\sqrt{10x^2} + 10x = 25 + x^2;\ x = (5 + \sqrt{2\tfrac{1}{2}}) + \sqrt{2\tfrac{1}{2} + \sqrt{250}},\ y = x - 5.$$

(41) $(\sqrt{x \cdot 2x} + 2)x = 30$ ***.

$$2x + \sqrt{2x^4} = 30;$$

multipliant par $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, on aura

$$x^2 + \sqrt{2} \cdot x = \sqrt{450},$$ 56 r°.

ce qu'on résout selon la règle.

(42) $x^2 = 40 + \sqrt{2x^2}.$

$$x = \sqrt{40\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

(43) $x = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4})y, \quad xy + x + y = 62.$

$$(1\tfrac{1}{3})x^2 + (2\tfrac{1}{3})x = 62,\ x^2 + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4})x = 46\tfrac{1}{2};$$

$$x = \sqrt{47\tfrac{17}{64}} - \tfrac{7}{8} = 6,\ y = 8.$$

(44) $x + y = 10, \quad xy = 4x + 5.$

$$x^2 + 5 = 6x;\ x = 3 + \sqrt{9 - 5} = 5,\ y = 5.$$ 56 v°

(45) $x = \frac{y}{3},\ y - x = 4$ ****.

$$3x - x = 4;\ x = 2,\ y = 6.$$

* Comparer Libri, t. II, p. 411, l. 13.

** Comp. *ibid.* p. 414, l. 15.

*** Comp. *ibid.* p. 420, l. 18.

**** Comparer Diophante, I, 4.

(46) $x + 20 = 3(x + 10)$ [*].

On obtient $x + 20 = 3x + 30$, ce qui est impossible ; mais si, dans l'équation proposée, on change 20 dans 40, on aura $x = 5$.

57 r°. (47) $20 - x = 4(10 - x)$ [**].

$$x = 6\tfrac{2}{3}.$$

(48) $x + 20 = 4(10 - x)$ [***].

$$x = 4.$$

(49) $x + y = 10, \ \dfrac{x \cdot y}{y - x} = \sqrt{10}$ [****].

$$\frac{10x - x^2}{10 - 2x} = \sqrt{10}, \ \sqrt{1000} + x^2 = 10x + \sqrt{40x^2};$$

57 v°. $x = (5 + \sqrt{10}) - \sqrt{35}.$

(50) $x + y + x^2 = z^2, \quad x + y + y^2 = t^2$ [*****].

Posons $y = x + 1,$

on aura $x + y + x^2 = (x + 1)^2.$

Il reste à résoudre $x + (x + 1) + (x + 1)^2 = t^2,$

ou $x^2 + 4x + 2 = t^2;$

posons $t = x - 2,$

on aura $x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4 - 4x; \ x = \tfrac{1}{4}, \ y = 1\tfrac{1}{4}.$

TROISIÈME SECTION.

(1) $x^2 + y = z^2, \quad y^2 + x = t^2$ [******].

Posons $y = 2x + 1,$

on aura $x^2 + (2x + 1) = (x + 1)^2.$

[*] Comparer Diophante, I, 8.
[**] Comp. *ibid.* I, 9.
[***] Comp. *ibid.* I, 10.
[****] Comparer Libri, t. II, p. 408, l. 31.
[*****] Comparer Diophante, II, 23.
[******] Comp. *ibid.* II, 21.

Il reste à résoudre $(2x+1)^2+x=4x^2+5x+1=t^2$;

posons $t=2x-2$,

donc $4x^2+5x+1=4x^2+4-8x$;

$$x=\frac{3}{13},\ y=\frac{18}{13}.$$ 58 r°.

(2) $x^2-y=z^2,\qquad y^2-x=t^2$ *.

Posons $x=x_1+1,\ y=2x_1+1$;

on aura $x^2-y=x_1^2$.

Il reste à résoudre $(2x_1+1)^2-(x_1+1)=4x_1^2+3x_1=t^2$;

posons $t=3x_1$,

donc $4x_1^2+3x_1=9x_1^2,\ x_1=\frac{3}{5}$;

$$x=\frac{8}{5},\ y=\frac{11}{5}.$$

(3) $x^2+y^2=z^2$.

En posant $y^2=x^2+2x+1$,

on aura à résoudre $2x^2+2x+1=z^2$;

posons $z=2x-1$,

donc $2x^2+2x+1=1+4x^2-4x,\ x=3$;

$$x^2=9,\ y^2=16.$$

(4) $x^2+y^2=z^2,\qquad x^2+y=t^2,\qquad y^2+x=v^2$.

Posons $x^2=9x_1^2,\ y^2=16x_1^2$; 58 v°.

on aura $9x_1^2+4x_1=t^2,\ 16x_1^2+3x_1=v^2$;

$$v^2-t^2=7x_1^2-x_1=(7x_1-1)x_1,$$

$$v^2=\left(\frac{(7x_1-1)+x_1}{2}\right)^2,\ \text{ou}\ 16x_1^2+3x_1=16x_1^2+\frac{1}{4}-4x_1;$$

donc $x_1=\frac{\frac{1}{4}}{7};\ x=\frac{3}{28},\ y=\frac{4}{28}$.

* Comparer Diophante, II, 22.

(5) $x+1=2(y-1),\quad y+2=3(z-2),\quad z+3=4(v-3),\quad v+4=5(x-4).$

$$y=\frac{x}{2}+1\tfrac{1}{2};$$

59 r°. $$\frac{x}{2}+3\tfrac{1}{2}=3(z-2),\ z=\tfrac{1}{6}x+3\tfrac{1}{6};$$

$$\tfrac{1}{6}x+6\tfrac{1}{6}=4(v-3),\ v=\frac{\frac{x}{8}}{3}+\left(4+\tfrac{1}{2}+\frac{\frac{1}{6}}{4}\right);$$

$$\frac{\frac{x}{8}}{3}+\left(8+\tfrac{1}{2}+\frac{\frac{1}{6}}{4}\right)=5(x-4),\ \left(4\tfrac{23}{24}\right)x=28\tfrac{13}{24};$$

59 v°. $$x=\tfrac{685}{119},\ y=\tfrac{521}{119},\ z=\tfrac{491}{119},\ v=\tfrac{569}{119}.$$

(6) $$\frac{x}{2}+\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}}{3}=\frac{x+y+z}{2},$$

$$\frac{2y}{3}+\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}}{3}=\frac{x+y+z}{3},$$

$$\frac{5z}{6}+\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}}{3}=\frac{x+y+z}{6}.$$

L'auteur pose $z=1$. Il suit alors de la première des trois équations

$$\tfrac{2}{3}x+\frac{y}{9}+\frac{\frac{1}{6}}{3}=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{x}{6}-\tfrac{4}{9}=\left(\tfrac{1}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{3}\right)y,\ y=\tfrac{3}{7}x-\tfrac{8}{7}.$$

En substituant cette valeur de y dans le premier membre de la troisième des équations proposées, on obtient

60 r°. $$\tfrac{8}{9}+\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=\tfrac{8}{9}+\frac{x}{6}+\tfrac{1}{21}x-\tfrac{8}{63}=\tfrac{9}{42}x+\tfrac{32}{42},$$

tandis qu'on a dans le second membre

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{10}{42}x-\tfrac{1}{42};$$

donc $$\tfrac{9}{42}x+\tfrac{32}{42}=\tfrac{10}{42}x-\tfrac{1}{42},\ \frac{x}{42}=\tfrac{33}{42};$$

$$x=33,\ y=\tfrac{3}{7}x-\tfrac{8}{7}=13,\ z=1.$$

(7) $x+y=10,\quad z+t=10,\quad y=2t,\quad z=4x$ *.

$y=10-x,\ t=10-4x;\ 10-x=20-8x;\ x=1\frac{3}{7};$ 60 v°.

$y=8\frac{4}{7},\ z=5\frac{5}{7},\ t=4\frac{2}{7}.$

(8) $x+y=10,\quad x^2+y^2=58$ **.

$x^2+21=10x;\ x=5\pm 2.$

L'une des deux parties sera 7, l'autre 3.

(9) $x+y=10,\quad y^2-x^2=40$ ***.

$100-20x=40;\ x=3,\ y=7.$

(10) $x+y=10,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}$ ****. 61 r°.

On sait que $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)ab=a^2+b^2$ *****;

donc $x^2+(10-x)^2=x.(10-x).2\frac{1}{6}.$

$24+x^2=10x;\ x=5\pm 1.$

L'une des deux parties sera 6, l'autre 4.

Autre méthode. Comme on a $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ ******, on pourra poser

$x_1+y_1=2\frac{1}{6},\ x_1.y_1=1,$

et l'on aura $x_1(2\frac{1}{6}-x_1)=1,\ x_1^2+1=2\frac{1}{6}x_1,\ x_1=\frac{13}{12}\pm\frac{5}{12};$ 61 v°.

l'un des deux nombres cherchés sera $1\frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{2}{3}$.

Il reste à résoudre $x+y=10,\ \frac{x}{y}=1\frac{1}{2}$ ou $\frac{x}{y}=\frac{2}{3};$

on aura $10-y=(1\frac{1}{2})y$ ou $10-y=\frac{2}{3}y,$

donc $y=4$ ou $y=6.$

* Comparer Diophante, I, 12.

** Comparer Mohammed Ben Moûçâ, éd. de Rosen, p. 39. — Libri, *Hist. des sciences mathématiques en Italie*, t. II, p. 368, l. 9. — Diophante, I, 31.

*** Comparer Mohammed Ben Moûçâ, p. 42. — Libri, t. II, p. 369, l. 5. — Diophante, I, 32.

**** Comparer Mohammed Ben Moûçâ, p. 44. — Libri, t. II, p. 369, l. 27.

***** Voir la partie théorique, ch. XI, fol. 25 r°.

****** Voir *ibid.*

TROISIÈME MÉTHODE. Posons $x = 5 + x_1$, $y = 5 - x_1$;

on aura $$(5 + x_1)^2 + (5 - x_1)^2 = (5 + x_1)(5 - x_1)\,2\tfrac{1}{6},$$

ou $$50 + 2x_1^2 = 54\tfrac{1}{6} - (2\tfrac{1}{6})x_1^2,$$

ou $$(4\tfrac{1}{6})x_1^2 = 4\tfrac{1}{6},\ x_1^2 = 1,\ x_1 = 1;$$

$$x = 6,\ y = 4.$$

62 r°. QUATRIÈME MÉTHODE *. On a $\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2\tfrac{1}{6}$;

multiplions toute cette équation par $(10 - x)$, on aura

$$\frac{100 + x^2 - 20x}{x} + x = 21\tfrac{2}{3} - (2\tfrac{1}{6})x;$$

multiplions de même par x, on aura

$$100 + x^2 - 20x + x^2 = (21\tfrac{2}{3})x - 2\tfrac{1}{6}x^2,$$

ou $$x^2 + 24 = 10x,$$

ce qui donne pour l'une des deux parties 6, et pour l'autre 4.

(11) $$x + y = 10,\quad \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}.$$

Posons $$\frac{x}{y} = x_1,\ \frac{y}{x} = x_1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3};$$

62 v°. on aura $$x_1^2 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})x_1 = 1;\ x_1 = \sqrt{\tfrac{25}{144} + 1} - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}) = \tfrac{2}{3}.$$

Il reste donc à résoudre $$x + y = 10,\ \frac{x}{y} = \tfrac{2}{3},$$

ce qui donne $$x = 4,\ y = 6.$$

AUTRE MÉTHODE. On a $\frac{10 - x}{x} - \frac{x}{10 - x} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$;

en multipliant par $(10 - x)$, on aura

$$\frac{100 + x^2 - 20x}{x} = 8\tfrac{1}{3} + \frac{x}{6};$$

puis, en multipliant par x, on aura

$$(8\tfrac{1}{3})x + \frac{x^2}{6} = 100 + x^2 - 20x,$$

63 r°. ou $$x^2 + 120 = 34x;\ x = 17 - 13 = 4,\ y = 6.$$

* Cette méthode n'est pas essentiellement différente de la première.

(12) $$x + y = 10, \quad \frac{y}{x} + x = 5\tfrac{1}{2}\,^{*}.$$

$$\frac{10 - x}{x} + x = 5\tfrac{1}{2}, \quad 10 + x^2 = 6\tfrac{1}{2}x;$$

$$x = \tfrac{13}{4} + \tfrac{3}{4} = 4, \quad y = 6.$$

(13) $$x + y = 10, \quad \left(\frac{y}{x} + y\right)x = 30\,^{**}.$$

$$\left(\frac{10 - x}{x} + 10 - x\right)x = 30, \quad x^2 + 20 = 9x;$$

$$x = \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2} = 4, \quad y = 6.$$ 63v°.

(14) $$x + y = 10, \quad \frac{y}{x} \cdot y = 9\,^{***}.$$

$$\frac{100 + x^2 - 20x}{x} = 9, \quad x^2 + 100 = 29x;$$

$$x = 14\tfrac{1}{2} - 10\tfrac{1}{2} = 4, \quad y = 6.$$

(15) $$x + y = 10, \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot x = 9.$$

$$\frac{100 + x^2 - 20x}{x} = 9, \quad 100 + x^2 = 29x; \quad x = 4, \quad y = 6.$$ 64r°.

(16) $$x + y = 10, \quad \frac{y}{x}(y - x) = 24\,^{****}.$$

$$\frac{10 - x}{x}(10 - 2x) = 24, \quad x^2 + 50 = 27x;$$

$$x = 13\tfrac{1}{2} - 11\tfrac{1}{2} = 2, \quad y = 8.$$

(17) $$x + y = 10, \quad \left(\frac{y}{x} + 10\right)y = 112.$$

$$\left(\frac{10 - x}{x} + 10\right)(10 - x) = 112, \quad x^2 + (3\tfrac{5}{9})x = 11\tfrac{1}{9};$$ 64v°.

$$x = 2, \quad y = 8.$$

* Comparer Libri, t. II, p. 388, l. 20.
** Comp. *ibid.* p. 389, l. 17.
*** Comp. *ibid.* p. 390, l. 7.
**** Comp. *ibid.* p. 386, l. 3.

(18) $$x+y=10,\quad \left(\frac{y}{x}+10\right)\left(\frac{x}{y}+10\right)=143\tfrac{1}{2}\ ^{*}.$$

65 r°. $$\left(\frac{10-x}{x}+10\right)\left(\frac{x}{10-x}+10\right)=143\tfrac{1}{2},\ x^2+16=10x;$$

$$x=5\pm 3.$$

L'une des deux parties sera 2, l'autre 8.

(19) $$x+y=10,\quad \left(10+\frac{y}{x}\right)\left(10-\frac{x}{y}\right)=107\tfrac{1}{2}\ ^{**}.$$

65 v°. $$\left(10+\frac{10-x}{x}\right)\left(10-\frac{x}{10-x}\right)=107\tfrac{1}{2},\ x^2+120=34x;$$

$$x=17-13=4,\ y=6.$$

(20) $$x+y=100,\ z+t=100,\ v+w=100,\ x=3t,\ z=2w,\ v=4y\ ^{***}.$$

66 r°. $$y=100-3t,\ v=400-12t,$$

$$w=12t-300,\ z=24t-600;$$

$$100-t=24t-600,\ t=28;$$

$$z=72,\ x=84,\ y=16,\ v=64,\ w=36.$$

(21) $$3x+\sqrt{x^2-3x}=14\ ^{****}.$$

$$x^2+24\tfrac{1}{2}=(10\tfrac{1}{8})x,\ x=5\tfrac{1}{16}-1\tfrac{1}{16}=4.$$

66 v°. (22) $$\left(x^2-\frac{x^2}{3}\right).3x=x^2\ ^{*****}.$$

On sait que $$\left(a-\frac{a}{3}\right).(1\tfrac{1}{2})=a;$$

on aura donc $1\tfrac{1}{2}=3x$, conséquemment $x^2=\tfrac{1}{4}$; $x=\tfrac{1}{2}$.

(23) $$3x+2\sqrt{x^2-3x}=x^2\ ^{******}.$$

$x^2-3x=2\sqrt{x^2-3x}$, conséquemment $x^2-3x=4$;

$$x^2=16.$$

[*] Comparer Libri, t. II, p. 382, l. 4.
[**] Comp. *ibid.* p. 383, l. 7.
[***] Comparer Diophante, I, 13.
[****] Comparer Libri, t. II, p. 392-394.
[*****] Comp. *ibid.* p. 392, l. 6. — Mohammed Ben Moûçâ, p. 65.
[******] Comparer Libri, t. II, p. 392-394.

(24) $x+y=20, \quad y+z=30, \quad z+x=40$ *.

Posons $x+y+z=x_1$;

on aura $(x_1-20)+(x_1-30)+(x_1-40)=x_1, \ x_1=45$;

$$z=25, \ x=15, \ y=5.$$

(25) $x+y+z=30, \quad y+z+t=45, \quad z+t+x=40, \quad t+x+y=35$ **.

Posons $x+y+z+t=x_1$;

on aura $(x_1-30)+(x_1-45)+(x_1-40)+(x_1-35)=x_1, \ x_1=50$; 67 r°.

$$t=20, \ x=5, \ y=10, \ z=15.$$

L'auteur ajoute : « Il faut que la somme des quantités mentionnées dans l'énoncé, divisée par le nombre des nombres cherchés moins un, soit plus grande que chacune de ces quantités; sinon, le problème est impossible. » Par exemple, le problème

$$x+y+z=20, \ y+z+t=30, \ [z+t+x=40,] \ t+x+y=50$$

n'admettrait pas de solution, parce qu'on aurait

$$\frac{20+30+40+50}{4-1}=46\tfrac{2}{3}<50.$$

L'auteur explique aussi qu'au moyen du procédé suivi dans la solution de ce problème, on peut deviner un nom, imaginé par une autre personne, en se faisant donner d'abord le nombre de lettres dont ce nom est composé, puis les sommes des valeurs numériques de toutes les lettres moins une, en 67 v°.
en omettant successivement toujours une autre. Suit un exemple dans lequel il s'agit de deviner le nom جعفر.

(26) $x+\frac{y+z}{3}=20, \ y\left[+\frac{z+x}{4}=20, \ z\right]+\frac{x+y}{5}=20$ ***. 68 r°.

On a $y+z=60-3x, \ 4y+z=80-x$;

donc $3y=20+2x$, ou $y=6\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}x$,

ce qui, retranché de $60-3x$, donne $z=53\tfrac{1}{3}-3\tfrac{2}{3}x$.

* Comparer Diophante, I, 16. — ** Comp. *ibid.* I, 17. — *** Comp. *ibid.* I, 17.

Puis on a $$100 - x = 5z + y,\ 60 - 3x = y + z;$$

donc $$40 + 2x = 4z,$$

ou $$10 + \frac{x}{2} = z = 53\tfrac{1}{3} - 3\tfrac{2}{3}x;$$

$$x = 10\tfrac{2}{3},\ y = 13\tfrac{2}{3},\ z = 15\tfrac{1}{3}.$$

L'auteur ajoute : Si les seconds membres des équations proposées ne sont pas donnés, on peut leur assigner une valeur arbitraire, et l'on procédera ensuite comme auparavant; on peut aussi leur donner une valeur inconnue et poser $x + z$ égal à 4, parce qu'on doit prendre le quart de cette somme,
68 v°. ou bien, égal à un autre nombre quelconque. En s'arrêtant à la supposition $x + z = 4$, on aura

$$z + \frac{x + y}{5} = y + 1,\ \text{ou}\ 4y + 5 = x + 5z;$$

mais $$4 = x + z,$$

donc $$4y + 1 = 4z,\ \text{ou}\ z = y + \tfrac{1}{4};$$

conséquemment $$x = 4 - (y + \tfrac{1}{4}) = (3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) - y;$$

mais $$x + \frac{y + z}{3} = y + 1,$$

donc $$(3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{3}y = y + 1,\ \text{ou}\ y = 2\tfrac{1}{8} = \tfrac{17}{8},$$

$$z = \tfrac{19}{8},\ x = \tfrac{13}{8}.$$

Puis l'auteur ajoute que $y = 17$, $z = 19$, $x = 13$ satisferont aussi aux équations proposées *.

Mais si l'on avait [en place de $x + z = 4$] la condition

$$x + \frac{y + z}{3} + (x + y + z) = 50,$$

on substituerait, dans le premier membre, les valeurs 13, 17, 19, ce
69 r°. qui donne 74; puis, en multipliant 13, 17, 19 par $\frac{50}{74}$, on obtiendra des valeurs de x, y, z qui satisferont à la nouvelle supposition « s'il plaît à Dieu. »

* A savoir, en changeant aussi la supposition $x + z = 4$ dans $x + z = 32$.

(27) $$x+\frac{y+z+t}{3}=\frac{n}{8},\quad y+\frac{x+z+t}{4}=\frac{n}{8},$$

$$z+\frac{x+y+t}{5}=\frac{n}{8},\quad t+\frac{x+y+z}{6}=\frac{n}{8}.$$

Posons $$x+z+t=4,$$

on aura $$y+1=\frac{n}{8};$$

donc $$t+\frac{x+y+z}{6}=y+1,$$

ou $$t+\frac{x+z}{6}=\tfrac{5}{6}y+1,\ \text{ou}\ 5y+6=x+z+6t;$$

mais $$4=x+z+t,$$

donc $$5y+2=5t,\ t=y+\tfrac{2}{5}.$$

On a de même $$z+\frac{x+y+t}{5}=y+1;$$

donc $$z+\frac{x+t}{5}=\tfrac{4}{5}y+1,\ \text{ou}\ 4y+5=x+t+5z;$$

mais $$4=x+t+z,$$

donc $$4y+1=4z,\ z=y+\tfrac{1}{4}.$$

Puis on a $$x+\frac{y+z+t}{3}=y+1;$$

donc $$x+\frac{z+t}{3}=\tfrac{2}{3}y+1,\ \text{ou}\ 2y+3=3x+z+t;$$ 69 v°.

mais $$4=x+z+t,$$

donc $$2y-1=2x,\ x=y-\tfrac{1}{2}.$$

On a donc $$x=y-\tfrac{1}{2},\ z=y+\tfrac{1}{4},\ t=y+\tfrac{2}{5};$$

conséquemment $$4=3y+\tfrac{1}{10}+\frac{\frac{1}{10}}{2},$$

ou $$y=\tfrac{77}{60},$$

$$x=\tfrac{47}{60},\ z=\tfrac{92}{60},\ t=\tfrac{101}{60}.$$

Posons ensuite $x=47$, $y=77$, $z=92$, $t=101$. Ces valeurs satisferont au

* Comparer Diophante, I, 28.

problème, et l'on aura $\frac{n}{8} = 137$. Si [au lieu de $x + z + t = 4$ ou $= 240$] l'on avait demandé que

$$\frac{n}{8} + x + y + z + t = 30,$$

on formerait $\frac{n}{8} + x + y + z + t = 454$, puis on multiplierait les valeurs 47, 77, etc. par $\frac{30}{454}$; les nouvelles valeurs ainsi obtenues satisferont également au problème.

70r°. (28) $$(x + 3)5 - (3 + 5)x = (3 + 5)x - (5 + x)3\ ^{*}.$$

$$x = 3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}.$$

Suit la preuve.

(29) $$x + y = z + 20, \quad y + z = x + 30, \quad z + x = y + 40\ ^{**}.$$

Posons $$x + y + z = nx_1,$$

disons $$= 2x_1;$$

70v°. on aura $$x + y + z = 2z + 20, \text{ ou } x_1 - 10 = z;$$

et de même $$x_1 - 15 = x, \; x_1 - 20 = y;$$

donc $$3x_1 - 45 = 2x_1, \; x_1 = 45;$$

$$x = 30, \; y = 25, \; z = 35.$$

(30) $$x + y + z = t + 20, \quad y + z + t = x + 30,$$

$$z + t + x = y + 40, \quad t + x + y = z + 50\ ^{***}.$$

Posons $$x + y + z + t = nx_1,$$

disons $$= 2x_1;$$

71r°. on aura $$x_1 - 10 = t, \; x_1 - 15 = x, \; x_1 - 20 = y, \; x_1 - 25 = z;$$

donc $$4x_1 - 70 = 2x_1, \; x_1 = 35;$$

$$x = 20, \; y = 15, \; z = 10, \; t = 25.$$

* Comparer Diophante, I, 43, premier cas. — ** Comparer *ibid.* I, 18. — *** Comparer *ibid.* I, 20.

(31) $x+y+z=100, \quad x+y=3z, \quad y+z=4x$ *.

On a $4z=100$,

donc $z=25$,

conséquemment $y=75-x$;

mais $y+25=4x$,

donc $100-x=4x$; $x=20$, $y=55$. 71 v°.

(32) $x=y+\frac{z}{3}, \quad y=z+\frac{x}{3}, \quad z=6+\frac{y}{3}$ **.

Posons $z=6+x_1$;

on aura $y=3x_1$,

donc $x=(3\frac{1}{3})x_1+2$;

mais $y=z+\frac{x}{3}$,

donc $3x_1=(2\frac{1}{9})x_1+6\frac{2}{3}$,

ou $x_1=7\frac{1}{2}$;

$$z=13\frac{1}{2}, \quad y=22\frac{1}{2}, \quad x=27.$$

(33) $y+\frac{x}{3}=z+\frac{y}{4}=x+\frac{z}{5}$.

Posons $y=4$;

on aura $4+\frac{x}{3}=z+1$, ou $z=3+\frac{x}{3}$. 72 r°.

D'un autre côté on a $x+\frac{z}{5}$ ou $\left(1+\frac{1}{15}\right)x+\frac{3}{5}=4+\frac{x}{3}$;

donc $x=\frac{51}{11}$, $y=\frac{44}{11}$, $z=\frac{50}{11}$.

(34) $\frac{3}{4}y+\frac{x}{3}=\frac{4}{5}z+\frac{y}{4}=\frac{2}{3}x+\frac{z}{5}$ ***.

Posons $y=4$;

on aura $3+\frac{x}{3}=\frac{4}{5}z+1$, ou $z=2\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{6})x$.

Mais aussi $\frac{2}{3}x+\frac{z}{5}$ ou $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})x+\frac{1}{2}=3+\frac{x}{3}$;

donc $x=6$, $z=5$. 72 v°.

* Comparer Diophante. I, 22. — ** Comparer *ibid.* I, 24. — *** Comparer *ibid.* I, 25.

(35) $$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{6}t = \tfrac{3}{4}y + \tfrac{1}{3}x = \tfrac{4}{5}z + \tfrac{1}{4}y = \tfrac{5}{6}t + \tfrac{1}{5}z\ ^{*}.$$

Posons $$y = 4;$$

en procédant comme dans le problème précédent, on aura

$$z = 2\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6})x,\quad t = 3 + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10})x,$$

et puis $$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{6}t \text{ ou } \left(\tfrac{2}{3} + \frac{\frac{1}{10}}{2}\right)x + \tfrac{1}{2} = 3 + \frac{x}{3};$$

donc $$x = \tfrac{150}{23},$$

$$y = \tfrac{92}{23},\quad z = \tfrac{120}{23},\quad t = \tfrac{114}{23}.$$

(36) $$x^2 + y^2 = 9\ ^{**}.$$

$$9 - x^2 = y^2;$$

posons $$y = 2x - 3;$$

donc $$9 - x^2 = 4x^2 + 9 - 12x,\quad x = 2\tfrac{2}{5};$$

73 r°. $$x^2 = 5\tfrac{19}{25},\quad y^2 = 3\tfrac{6}{25}.$$

(37) $$x^2 + y^2 = 10,$$

à résoudre par deux nombres carrés autres que 1, 9 ***.

Posons $$x^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1,$$

donc $$9 - x_1^2 - 2x_1 = y^2;$$

posons $$y = 3x_1 - 3;$$

on aura $$9 - x_1^2 - 2x_1 = 9x_1^2 + 9 - 18x_1,\quad x_1 = 1\tfrac{3}{5};$$

$$x^2 = 6\tfrac{19}{25},\quad y^2 = 3\tfrac{6}{25}.$$

(38) $$y^2 - x^2 = 5\ ^{****}.$$

Posons $$y^2 = x^2 + 2x + 1,$$

donc $$5 = 2x + 1,\quad x = 2;$$

$$x^2 = 4,\quad y^2 = 9.$$

* Comparer Diophante, I, 26.

** Comparer *ibid.* II, 8.

*** Comparer *ibid.* II, 10.

**** Comparer *ibid.* II, 11.

(39) $x^2 + z = t^2, \quad y^2 + z = v^2.$

Posons $z = 2x + 1$, et y^2 égal à un carré quelconque, tel que $(x+1)^2$; on aura à résoudre

$$x^2 + 4x + 2 = v^2;$$

posons $v = x - 2;$

il suit $x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4 - 4x, \; x = \frac{1}{4};$ 73 v°.

$$x^2 = \frac{1}{16}, \; y^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}, \; z = 1\frac{1}{2}.$$

(40) $x + 3 = y^2, \quad x + 5 = z^2$ *.

On a $z^2 - y^2 = 2 = 4 \cdot \frac{1}{2};$

on pose $z = \frac{4 + \frac{1}{2}}{2} = 2\frac{1}{4};$

donc $z^2 = 5 + \frac{1}{16}, \; x = \frac{1}{16}, \; y^2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})^2.$

(41) $5 - x = y^2, \quad 3 - x = z^2$ **.

On a $y^2 - z^2 = 2 = 2 \cdot 1;$

on posera, soit $y = \frac{2 + 1}{2},$

donc $5 - x = (\frac{3}{2})^2, \; x = 2\frac{3}{4};$

soit $z = \frac{2 - 1}{2},$

donc $3 - x = (\frac{1}{2})^2,$

ce qui donne également $x = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$

(42) $x - 5 = y^2, \quad x - 9 = z^2$ ***. 74 r°.

On a $y^2 - z^2 = 4 = 4 \cdot 1;$

on posera, soit $y = \frac{4 + 1}{2},$

donc $x - 5 = 6\frac{1}{4}, \; x = 11\frac{1}{4};$

* Comparer Diophante, II, 12. — ** Comparer *ibid.* II, 13. — *** Comparer *ibid.* II, 14.

soit $z = \frac{4-1}{2}$,

donc $x - 9 = 2\frac{1}{4}$, $x = 11\frac{1}{4}$.

L'auteur fait observer qu'on a résolu ces trois derniers problèmes par la méthode de l'égalité double (بالمساواة المثناة). Mais si l'on veut, on résoudra le problème actuel* par la méthode de l'istikrâ (بطريق الاستقراء). On posera, pour cet effet

$$x = x_1^2 + 5,$$

et l'on aura $x - 5 = x_1^2$, $x - 9 = x_1^2 - 4 = z^2$;

on posera $z = x_1 - 1$,

et l'on obtient $x_1^2 - 4 = x_1^2 + 1 - 2x_1$;

donc $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $x = 11\frac{1}{4}$.

(43) $x + y = 20$, $x + z^2 = t^2$, $y + z^2 = v^2$ **.

Choisissons deux nombres tels que la somme de leurs carrés soit plus petite que 20; disons 2 et 3.

74 v°. On posera $t^2 = (z+2)^2 = z^2 + 4 + 4z$, $x = 4 + 4z$;

$$v^2 = (z+3)^2 = z^2 + 9 + 6z, \quad y = 9 + 6z;$$

$$(4z + 4) + (6z + 9) = 20, \quad z = \frac{7}{10};$$

$$x = 6\frac{4}{5}, \quad y = 13\frac{1}{5}, \quad z^2 = \frac{49}{100}.$$

(44) $x + y = 20$, $z^2 - x = t^2$, $z^2 - y = v^2$ ***.

Posons $z^2 = x_1^2 + 4x_1 + 4$, $x = 4x_1 + 4$, $y = 2x_1 + 3$;

on aura $z^2 - x = x_1^2$, $z^2 - y = (x_1 + 1)^2$.

$$x + y = 6x_1 + 7 = 20;$$

donc $x_1 = 2\frac{1}{6}$;

$$x = 12\frac{2}{3}, \quad y = 7\frac{1}{3}.$$

* Et de même les deux précédents; comparer les problèmes 29 et 31 de la deuxième section.

** Comparer Diophante, II, 15.

*** Comparer *ibid.* II, 16.

(45) $y = 3x, \quad 9 + x = z^2, \quad 9 + y = t^2$ *. 75 r°.

Posons $x = x_1^2 + 6x_1, \; y = 3x_1^2 + 18x_1$;

on aura $z^2 = (x_1 + 3)^2, \; 3x_1^2 + 18x_1 + 9 = t^2$;

posons $t = 3x_1 - 3$;

on aura $3x_1^2 + 18x_1 + 9 = 9x_1^2 + 9 - 18x_1, \; x_1 = 6,$

$$x = 72, \; y = 216.$$

(46) $x + y + z + t = 20, \quad x + \frac{x}{2} = y + \frac{y}{3} = z + \frac{z}{4} = t + \frac{t}{6}$.

Posons $x = 2x_1$;

on aura $3x_1 = y + \frac{y}{3}$, donc $y = (2\frac{1}{4})x_1$;

$3x_1 = z + \frac{z}{4}$, donc $z = (2\frac{2}{5})x_1$;

$3x_1 = t + \frac{t}{6}$, donc $t = (2\frac{4}{7})x_1$.

En ajoutant, on obtient $(9\frac{31}{140})x_1 = 20, \; x_1 = 2\frac{218}{1291}$;

$$x = 4\tfrac{436}{1291}, \; y = 4\tfrac{1136}{1291}, \; z = 5\tfrac{265}{1291}, \; t = 5\tfrac{745}{1291}.$$ 75 v°.

(47) $x + y + z + t = 20, \quad 2x = 3y = 4z = 5t.$

Posons $x = \frac{x_1}{2}, \; y = \frac{x_1}{3}, \; z = \frac{x_1}{4}, \; t = \frac{x_1}{5}$;

on aura $\frac{77}{60}x_1 = 20, \; x_1 = \frac{1200}{77}$;

$$x = \tfrac{600}{77}, \; y = \tfrac{400}{77}, \; z = \tfrac{300}{77}, \; t = \tfrac{240}{77}.$$

(48) $x + y + z = 20, \quad \frac{x}{2} = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z.$

Posons $x = 2x_1, \; y = (1\frac{1}{2})x_1, \; z = (1\frac{1}{3})x_1$; 76 r°.

on aura $(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x_1 = 20, \; x_1 = \frac{120}{29}$;

$$x = \tfrac{240}{29}, \; y = \tfrac{180}{29}, \; z = \tfrac{160}{29}.$$

* Comparer Diophante, II, 17.

(49) $x+y+z=20, \quad \frac{4}{3}x=\frac{3}{4}y=\frac{6}{5}z.$

Posons $x=\frac{3}{4}x_1,\ y=(1\frac{1}{3})x_1,\ z=\frac{5}{6}x_1;$

on aura $(2+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})x_1=20,\ x_1=\frac{48}{7};$

$x=\frac{36}{7},\ y=\frac{64}{7},\ z=\frac{40}{7}.$

(50) $x^2+y^2=u^2, \quad z^2+t^2=u^2.$

76v°. Posons $y=x+2$ et u égal à un nombre donné quelconque, disons $u=10;$

on aura $2x^2+4x+4=100,\ x=-1+\sqrt{1+48}=6,\ y=8.$

Le reste du problème consiste à diviser 100 en deux nombres carrés autres que 36, 64, problème discuté antérieurement *.

QUATRIÈME SECTION.

(1) $x+y+x^2=z^2, \quad x+y+y^2=t^2$ **.

Posons $y=x+1;$

on aura $z^2=(x+1)^2$, et $x^2+4x+2=t^2;$

posons $t=x-2,$

donc $x^2+4x+2=x^2+4-4x;\ x=\frac{1}{4},\ y=1\frac{1}{4}.$

(2) $x^2-(x+y)=z^2, \quad y^2-(x+y)=t^2$ ***.

Posons $y=x+1;$

on aura $t^2=x^2,$

et $x^2-2x-1=z^2;$

77r°. posons $z=x-2,$

donc $x^2-2x-1=x^2+4-4x;\ x=2\frac{1}{2},\ y=3\frac{1}{2}.$

* Voir le problème 37 de cette section. — ** Comparer problème 50 de la deuxième section, et Diophante II, 23. — *** Comparer Diophante II, 24.

(3) $(x+y)^2 + x = z^2, \quad (x+y)^2 + y = t^2$ *.

Posons $(x+y)^2 = x_1^2,\ x = 3x_1^2,\ y = 8x_1^2$;

donc $11x_1^2 = x_1$, ou $x_1 = \frac{1}{11}$;

$x = \frac{3}{121},\ y = \frac{8}{121}$.

(4) $(x+y)^2 - x = z^2, \quad (x+y)^2 - y = t^2$ **.

Posons $(x+y)^2 = 9x_1^2,\ x = 5x_1^2,\ y = 8x_1^2$;

donc $13x_1^2 = 3x_1,\ x_1 = \frac{3}{13},\ x_1^2 = \frac{9}{169}$;

$x = \frac{45}{169},\ y = \frac{72}{169}$.

(5) $x \cdot y + x = z^2, \quad x \cdot y + y = t^2, \quad z + t = 6$ ***. 77 v°.

Posons $y = 4x - 1$;

on aura $z^2 = 4x^2,\ z = 2x,\ t = 6 - 2x$;

donc $4x^2 + 3x - 1 = 4x^2 + 36 - 24x$;

$x = \frac{37}{27},\ y = \frac{121}{27}$.

(6) $x \cdot y - x = z^2, \quad x \cdot y - y = t^2, \quad z + t = 5$ ****.

Posons $y = 4x + 1$;

on aura $z^2 = 4x^2,\ z = 2x,\ t = 5 - 2x$;

donc $4x^2 - 3x - 1 = 4x^2 + 25 - 20x$; 78 r°.

$x = \frac{26}{17},\ y = \frac{121}{17}$.

(7) $x^2y^2 + y^2 = z^2, \quad x^2y^2 + x^2 = t^2$ *****.

Posons y^2 égal à un nombre carré quelconque, disons $= 1$; on aura

$x^2 + 1 = z^2$;

posons $z = x - 2$,

donc $x^2 + 1 = x^2 + 4 - 4x;\ x = \frac{3}{4},\ x^2 = \frac{9}{16},\ z^2 = \frac{25}{16}$.

Mais maintenant il faudrait encore que $(\frac{9}{16} \cdot 1) + \frac{9}{16}$ fût un nombre carré, ce

* Comparer Diophante, II, 25.

** Comparer *ibid.* II, 26.

*** Comparer *ibid.* II, 27.

**** Comparer *ibid.* II, 28.

***** Comparer *ibid.* II, 29.

qui n'est pas le cas. Recommençons donc la solution et posons

78 v°. $$y^2 = \tfrac{9}{16};$$

donc $$\tfrac{9}{16}x^2 + \tfrac{9}{16} = z^2,$$

ou $$9x^2 + 9 = z'^2;$$

posons $$z' = 3x - 4,$$

on aura $$9x^2 + 9 = 9x^2 + 16 - 24x;\ x = \tfrac{7}{24},\ x^2 = \tfrac{49}{576}.$$

(8) $$x^2y^2 - y^2 = z^2, \qquad x^2y^2 - x^2 = t^2\ ^{*}.$$

Posons $$y^2 = 1,$$

on aura $$x^2 - 1 = z^2;$$

posons $$z = x - 2,$$

79 r°. donc $$x^2 - 1 = x^2 + 4 - 4x;\ \text{ou}\ x = 1\tfrac{1}{4},\ x^2 = \tfrac{25}{16},\ z^2 = \tfrac{9}{16}.$$

Mais maintenant il faudrait encore que $(\frac{25}{16}\cdot 1) - \frac{25}{16}$ fût un nombre carré, ce qui n'est pas le cas. Recommençons donc la solution et posons

$$y^2 = \tfrac{25}{16},$$

donc $$\tfrac{25}{16}x^2 - \tfrac{25}{16} = z^2;$$

divisons tout cela par $1\frac{9}{16}$ qui est un nombre carré; on aura à résoudre

$$x^2 - 1 = z^2;$$

posons $$z = x - 4;$$

on aura $$x^2 - 1 = x^2 + 16 - 8x,$$

ou $$x = 2\tfrac{1}{8},\ x^2 = \tfrac{289}{64},\ y^2 = \tfrac{100}{64}.$$

(9) $$x \cdot y + (x + y) = z^2, \qquad x \cdot y - (x + y) = t^2\ ^{**}.$$

Résolvons d'abord $x_1 + y_1 = z_1^2$, $x_1 - y_1 = t_1^2$, ce qui est facile, parce qu'on
79 v°. a toujours $(a^2 + b^2) \pm 2ab$ égal à un nombre carré***. Prenons donc $x_1 = 13$, $y_1 = 12$.

Ensuite posons $$y = 13x,\ x + y = 12x^2;$$

on aura $$z^2 = 25x^2,\ t^2 = 1x^2,$$

et $$14x = 12x^2;\ x = \tfrac{7}{6},\ y = \tfrac{91}{6}.$$

* Comparer Diophante, II, 30.

** Comparer *ibid.* II, 31.

*** L'auteur désigne ici la quantité $2ab$ par l'expression المتّمان.

(10) $x+y=z^2, \quad x.y+(x+y)=t^2, \quad x.y-(x+y)=v^2$ *.

Résolvons d'abord $x_1+y_1^2=t_1^2, \; x_1-y_1^2=v_1^2$;

cherchons, pour cet effet, deux nombres α, β tels que $2\alpha\beta=\gamma^2$; prenons $\alpha=4, \; \beta=2$;

on aura $\begin{cases}(\alpha^2+\beta^2)+\gamma^2=(\alpha+\beta)^2, \; t_1=6 \\ (\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2=(\alpha-\beta)^2, \; v_1=2\end{cases}$ $\qquad x_1=20, \; y_1^2=16.$

Ensuite posons $x=2\xi$, $y=10\xi$, de sorte que $xy=20\xi^2$; et déterminons ξ de telle sorte que $x+y=16\xi^2$;

on aura donc $12\xi=16\xi^2, \; \xi=\frac{3}{4}; \; x=\frac{6}{4}, \; y=\frac{30}{4}.$

(11) $x^2+y=t^2, \quad y^2+z=v^2, \quad z^2+x=w^2$ **. 80 r°.

Posons $y=2x+1$;

on aura $t^2=(x+1)^2$,

et $y^2=4x^2+4x+1$;

posons $z=4x+3$;

on aura $v^2=(2x+2)^2$,

et $16x^2+25x+9=w^2$;

posons $w=4x-4$;

donc $16x^2+25x+9=16x^2+16-32x$;

$$x=\frac{7}{57}, \; y=\frac{71}{57}, \; z=\frac{199}{57}.$$

(12) $x^2-y=t^2, \quad y^2-z=v^2, \quad z^2-x=w^2$ ***.

Posons $x=x_1+1, \; y=2x_1+1$; 80 v°.

on aura $x^2-y=x_1^2$,

et $y^2=4x_1^2+4x_1+1$;

posons $z=4x_1+1$;

on aura $y^2-z=(2x_1)^2$,

et $16x_1^2+7x_1=w^2$;

posons $w=5x_1$;

donc $16x_1^2+7x_1=25x_1^2$, ou $x_1=\frac{7}{9}$;

$$x=\frac{16}{9}, \; y=\frac{23}{9}, \; z=\frac{37}{9}.$$

* Comparer Diophante, II, 32. — ** Comparer *ibid.* II, 33. — *** Comparer *ibid.* II, 34.

(13) $(x+y+z)+x^2=t^2, \quad (x+y+z)+y^2=v^2, \quad (x+y+z)+z^2=w^2$ *.

Résolvons d'abord $\alpha+\beta^2=\epsilon^2,\ \alpha+\gamma^2=\eta^2,\ \alpha+\delta^2=\vartheta^2$.

Prenons, pour cet effet, un nombre divisible en deux facteurs de trois manières différentes, par exemple $12=4\,.\,3=6\,.\,2=12\,.\,1$.

On sait que si $a=m\,.\,n$, $a+\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ est un nombre carré;

on obtient donc $$12+(\tfrac{1}{2})^2=(3\tfrac{1}{2})^2,$$

81 r°. $$12+2^2=4^2,$$

$$12+(5\tfrac{1}{2})^2=(6\tfrac{1}{2})^2.$$

Maintenant posons $x=\frac{1}{2}x_1,\ y=2x_1,\ z=(5\frac{1}{2})x_1,\ x+y+z=12x_1^2$;

donc $$8x_1=12x_1^2,\ x_1=\tfrac{2}{3};$$

$$x=\tfrac{1}{3},\ y=1\tfrac{1}{3},\ z=3\tfrac{2}{3}.$$

(14) $x^2-(x+y+z)=t^2, \quad y^2-(x+y+z)=v^2, \quad z^2-(x+y+z)=w^2$ **.

On sait que si $a=m\,.\,n$, $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a$ est un nombre carré, et l'on obtient

$$(3\tfrac{1}{2})^2-12=(\tfrac{1}{2})^2,$$

$$4^2-12=2^2,$$

$$(6\tfrac{1}{2})^2-12=(5\tfrac{1}{2})^2.$$

Posons $x=(3\frac{1}{2})x_1,\ y=4x_1,\ z=(6\frac{1}{2})x_1,\ x+y+z=12x_1^2$,

donc $$14x_1=12x_1^2,\ x_1=\tfrac{7}{6};$$

81 v°. $$x=\tfrac{49}{12},\ y=\tfrac{56}{12},\ z=\tfrac{91}{12}.$$

(15) $$x-y=5, \quad \sqrt{x\,.\,(10x)}=y^2 \text{ ***}.$$

$$\sqrt{10x^2}=x^2+25-10x;$$

$$x=(5+\sqrt{2\tfrac{1}{2}})+\sqrt{2\tfrac{1}{2}+\sqrt{250}}.$$

(16) $$(\sqrt{2x^2}+2)x=30.$$

$$\sqrt{2x^4}+2x=30, \text{ ou } x^2+\sqrt{2x^2}=\sqrt{450};$$

82 r°. $$x=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{450}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

* Comparer Diophante, II, 35.

** Comparer *ibid.* II, 36.

*** Comparer le problème 40 de la deuxième section. — Libri, vol. II, p. 414, l. 15.

(17) $$2\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}}=x^2\,^{*}.$$

$$x=2+\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

(18) $$2\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}}=20\,^{**}.$$

$$x=\frac{20}{2+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}}.$$

(19) $$\left(x+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2=4x\,^{***}.$$

Posons $$x=2x_1^2;$$

on aura $4x_1^4+4x_1^3=7x_1^2$, ou $x_1^2+x_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $x_1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$;

$$x=2\left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

(20) $$(x+7)\sqrt{3x}=10x\,^{****}.$$

Posons $$\frac{x_1^2}{3}=x;$$

on aura $\frac{1}{3}x_1^3+7x_1=(3\frac{1}{3})x_1^2$, ou $x_1^3+21x_1=10x_1^2$, $x_1=5-2=3$; 82 v°.

$$x=3.$$

(21) $$y=3x,\qquad (y+\sqrt{y})(x+\sqrt{x})=10y\,^{*****}.$$

$$(3x+\sqrt{3x})(x+\sqrt{x})=3x^2+\sqrt{3x^3}+\sqrt{9x^3}+\sqrt{3x^2}=30x,$$

ou, en divisant par x, $3x+\sqrt{3}+\sqrt{9x}+\sqrt{3x}=30$;

donc $$(\sqrt{9x}+\sqrt{3x})^2=(30-\{3x+\sqrt{3}\})^2,$$

ou $$12x+\sqrt{108x^2}=903+9x^2+\sqrt{108x^2}-180x-\sqrt{10800},$$

ou $$192x=9x^2+903-\sqrt{10800},$$ 83 r°.

ce qu'on résout selon la règle.

* Comparer Libri, *Hist. des sciences math.* vol. II, p. 442, l. 3.

** Comparer *ibid.* p. 443, l. 1.

*** Comparer *ibid.* p. 446, l. 14.

**** Comparer *ibid.* p. 447, l. 26.

***** Comparer *ibid.* p. 448, l. 16.

(22) $$x+\sqrt{x}+\sqrt{2x}+\sqrt{5x^2}=10\ ^{*}.$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x}\right)^2=\left(10-\{x+\sqrt{5x^2}\}\right)^2,$$

$$3x+\sqrt{8x^2}=100+6x^2+\sqrt{20x^4}-20x-\sqrt{2000x^2},$$

ou $$23x+\sqrt{2000x^2}+\sqrt{8x^2}=100+6x^2+\sqrt{20x^4}.$$

Pour réduire le nombre des carrés, on multiplie par $\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}$, ce qui donne

$$x^2+37\tfrac{1}{2}-\sqrt{781\tfrac{1}{4}}=(8\tfrac{5}{8})x-\sqrt{\left(41+\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{64}\right)x^2}$$
$$+\sqrt{(281\tfrac{1}{4})x^2}-(12\tfrac{1}{2})x$$
$$+\sqrt{(1\tfrac{1}{8})x^2}-\sqrt{\tfrac{5}{8}x^2}$$

83 v°. $$=\sqrt{(281\tfrac{1}{4})x^2}+\sqrt{(1\tfrac{1}{8})x^2}-\sqrt{\left(41+\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{64}\right)x^2}-(3\tfrac{7}{8})x-\sqrt{\tfrac{5}{8}x^2}.$$

On a donc ramené le problème à une équation de la forme $x^2+a=bx$ qu'on résout selon la règle.

(23) $$x^2+y^2=z^2,\quad x.z=y^2,\quad x.y=10\ ^{**}.$$

On a $$y=\frac{10}{x},\quad z=\frac{100}{x^3};$$

donc $$x^2+\frac{100}{x^2}=\frac{10000}{x^6};$$

en multipliant par x^6 ***, on obtient

$$10000=100x^4+x^8,\quad x^4=\sqrt{12500}-50;$$

$$x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{12500}-50}}.$$

(24) $$x+y=10,\quad x-2\sqrt{x}=y+2\sqrt{y}\ ^{****}.$$

Posons $$x=5+x_1,\ y=5-x_1;$$

84 r°. on aura $$5+x_1-2\sqrt{5+x_1}=5-x_1+2\sqrt{5-x_1},$$

ou $$2x_1=\sqrt{20+4x_1}+\sqrt{20-4x_1};$$

donc $$4x_1^2=40+\sqrt{1600-64x_1^2},$$

* Comparer Libri, *Hist. des sciences math.* vol. II, p. 449, l. 31.

** Comparer *ibid.* p. 451, l. 3.

*** L'auteur multiplie d'abord par x^2, et ensuite par x^4.

**** Comparer Libri, vol. II, p. 461, l. 14.

et conséquemment $1600 - 64x_1^2 = (4x_1^2 - 40)^2 = 16x_1^4 + 1600 - 320x_1^2$,

ou $256x_1^2 = 16x_1^4,\ x_1 = \sqrt{\frac{256}{16}} = 4;$

$$x = 9,\ y = 1.$$

(25) $x + y = 10,\ \left(\frac{10}{x} + \frac{10}{y}\right)^2 = 20$ *.

Posons $x = 5 + x_1,\quad y = 5 - x_1;$

on aura $(5 + x_1)(5 - x_1)\sqrt{20}$ ou $\sqrt{12500 + 20x_1^4 - 1000x_1^2} = 100$,

parce que $\left(\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b}\right) \cdot (\{a - b\} \cdot b) = a^2;$ 84 v°.

donc $10000 = 12500 + 20x_1^4 - 1000x_1^2$,

ou $20x_1^4 + 2500 = 1000x_1^2$, ou $x_1^4 + 125 = 50x_1^2$,

$$x_1^2 = 25 - \sqrt{500},\ x_1 = \sqrt{25 - \sqrt{500}}.$$

(26) $x + y = 10,\quad \left(\frac{30}{x} + \frac{30}{y}\right)^2 = 180.$

On a $\left(\frac{30}{x} + \frac{30}{y}\right)^2 = 9 \cdot \left(\frac{10}{x} + \frac{10}{y}\right)^2 = 180;$

donc $\left(\frac{10}{x} + \frac{10}{y}\right)^2 = 20,$

ce qu'on vient de résoudre.

(27) $x + x^2 = z^2,\qquad x - x^2 = t^2$ **.

Résolvons d'abord $y_1 + x_1^2 = z_1^2,\ y_1 - x_1^2 = t_1^2.$

Posons $y_1 = 2x_1 + 1;$ 85 r°.

on aura $z_1^2 = (x_1 + 1)^2,$

et $2x_1 + 1 - x_1^2 = t_1^2;$

posons $t_1 = 1 - x_1;$

on aura $2x_1 + 1 - x_1^2 = 1 + x_1^2 - 2x_1,$

donc $x_1 = 2,\ x_1^2 = 4,\ y_1 = 5.$

* Comparer Libri, vol. II, p. 475, l. 16. — ** Comparer le problème 28 de la deuxième section.

Puis on aura $x = \frac{4}{5}$, $x^2 = \frac{16}{25}$.

L'auteur fait observer que la méthode qu'on vient d'employer est d'une grande utilité dans la résolution des problèmes de la forme $x^2 + mx = z^2$, $x^2 - nx = t^2$.

(28) $x^2 + 2x = z^2$, $x^2 - 3x = t^2$.

Résolvons d'abord $x_1^2 + 2y_1 = z_1^2$, $x_1^2 - 3y_1 = t_1^2$.

Posons $y_1 = 2x_1 + 2$;

on aura $(x_1 + 2)^2 = z_1^2$,

et $x_1^2 - 6x_1 - 6 = t_1^2$;

posons $t_1 = x_1 - 4$;

on aura $x_1^2 - 6x_1 - 6 = x_1^2 + 16 - 8x_1$,

85 v°. et $x_1 = 11$,

donc $x_1^2 = 121$, $y_1 = 24$;

puis on aura $x = \frac{121}{24} = 5 + \frac{\frac{1}{8}}{3}$.

(29) $x + y = 10$, $x + 20 = z^2$, $40 - y = t^2$ *.

On a $x = z^2 - 20$;

donc $y = 30 - z^2$,

et $t^2 = 10 + z^2$.

Prenons t de sorte qu'on obtienne $z^2 > 20$ et $z^2 - 20 < 10$;

posons donc $t = z + 1$;

on aura $10 + z^2 = z^2 + 2z + 1$, $z = 4\frac{1}{2}$;

$z^2 = 20\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$, $y = 9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

(30) $x + 4 = y^2$, $9 - x = z^2$.

On résout $y^2 + z^2 = 13$ par deux nombres carrés autres que 9, 4. Puis on retranche 4 du plus grand des deux carrés trouvés, le reste sera x.

* Comparer le problème 29 de la deuxième section.

(31) $x+10=y^2, \quad x+20=z^2$ *.

On a $y^2+10=z^2$;

posons $z=y+1$;

on aura $y^2+10=y^2+2y+1$; $y=4\frac{1}{2}$, $y^2=20\frac{1}{4}$, $x=10\frac{1}{4}$.

(32) $10x-8-x^2=y^2$. 86 r°.

L'auteur fait d'abord observer que le problème n'aura de solution qu'autant que $\left(\frac{10}{2}\right)^2-8$ peut être divisé en deux nombres carrés. Dans l'exemple actuel, on a $17=16+1$.

Posons $x^2+16=10x-8$,

ou $x^2+1=10x-8$;

on aura $x=6$ ou $=4$.

[ou de l'autre côté $x=9, 1$].

(33) $260-6x-x^2=y^2$.

Divisons $\left(\frac{6}{2}\right)^2+260$ en deux carrés; on a $269=10^2+13^2$.

Posons $100+x^2=260-6x$,

ou $169+x^2=260-6x$;

donc $x=10$, ou $x=7$.

(34) $x^2+x=y^2, \quad x^2+1=z^2$.

Posons $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}$;

on aura $x^2+x=x^2+1\frac{1}{4}-\sqrt{x^2+1}$, 86 v°

ou $1\frac{1}{4}-x=\sqrt{x^2+1}$; $x=\frac{9}{40}$.

(35) $x^2-5=y^2, \quad y^2+y=z^2$.

On a $x^2-5+\sqrt{x^2-5}=z^2$;

posons $z=x-\frac{1}{2}$;

* Comparer le problème 31 de la deuxième section.

donc $x^2 - 5 + \sqrt{x^2 - 5} = x^2 + \frac{1}{4} - x$, ou $\sqrt{x^2 - 5} = 5\frac{1}{4} - x$;

conséquemment $x^2 - 5 = \left(27 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{8}\right) + x^2 - 10\frac{1}{2}x$;

$$x = 3\tfrac{17}{168}.$$

87 r°. (36) $x^2 + 3x + 1 = y^2$, $x^2 - (3x - 2) = z^2$.

Posons $z = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - 3$;

on aura $x^2 + 3x + 10 - \sqrt{36x^2 + 36 + 108x} = x^2 + 2 - 3x$;

donc $36x^2 + 36 + 108x = (6x + 8)^2 = 36x^2 + 64 + 96x$,

ou $12x = 28$, $x = 2\frac{1}{3}$.

(37) $x^2 + (1 - x) = y^2$, $x^2 - (1 - x) = z^2$.

Posons $y = 1 - \sqrt{x^2 + x - 1}$,

87 v°. donc $x^2 + 1 - x = x^2 + x - \sqrt{4x^2 + 4x - 4}$;

conséquemment $4x^2 + 4x - 4 = (2x - 1)^2 = 4x^2 + 1 - 4x$;

$$x = \tfrac{5}{8}.$$

(38) $x^2 + (2 - x) = y^2$, $x^2 - (3 - x) = z^2$.

Posons $y = 1 + \sqrt{x^2 + x - 3}$,

conséquemment $x^2 + 2 - x = x^2 + x - 2 + \sqrt{4x^2 + 4x - 12}$;

donc $4x^2 + 4x - 12 = (4 - 2x)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$;

$$x = 1\tfrac{2}{5}.$$

88 r°. (39) $x^2 + x + 1 = y^2$, $x^2 + 2x + 2 = z^2$.

Posons $z = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$,

conséquemment $x^2 + 2x + 2 = x^2 + x + 1\frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + 1}$;

donc $x^2 + x + 1 = (x + \frac{3}{4})^2 = x^2 + (1\frac{1}{2})x + \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{8}\right)$;

$$x = \tfrac{7}{8}.$$

Après la fin de ce problème, l'auteur ajoute :

« Parmi ces problèmes, il y en a qui ne sont pas résolubles par cette méthode. J'expliquerai, dans le commentaire de cet ouvrage, lesquels d'entre eux sont résolubles, et lesquels ne le sont pas, de même que je montrerai en quoi consiste l'artifice dont on se sert pour leur résolution. »

(40) $$x+y+z=50,$$

$$x-\left(\frac{x}{3}+2\right)+\left(\frac{z}{5}+4\right)=y-\left(\frac{y}{4}+3\right)+\left(\frac{x}{3}+2\right)=z-\left(\frac{z}{5}+4\right)+\left(\frac{y}{4}+3\right)\text{*}.$$

Posons $y=8$;

on aura $y-\left(\frac{y}{4}+3\right)+\left(\frac{x}{3}+2\right)=5+\frac{x}{3}$;

donc $x-\left(\frac{x}{3}+2\right)+\left(\frac{z}{5}+4\right)=5+\frac{x}{3}$, 88 v°.

ou $z=15-\left(1\frac{2}{3}\right)x$;

conséquemment $z-\left(\frac{z}{5}+4\right)=8-\left(1\frac{1}{3}\right)x$, et $\frac{y}{4}+3=5$;

donc $13-\left(1\frac{1}{3}\right)x=5+\frac{1}{3}x$,

ou $x=4\frac{4}{5},\ y=8,\ z=7$,

ce qui donne $x+y+z=19\frac{4}{5}$;

tandis qu'on désirait obtenir $x+y+z=50$.

Recommençons donc la solution, et posons $y=12$;

on aura $y-\left(\frac{y}{4}+3\right)+\left(\frac{x}{3}+2\right)=8+\frac{x}{3}$,

donc $x-\left(\frac{x}{3}+2\right)+\left(\frac{z}{5}+4\right)=8+\frac{x}{3}$,

ou $z=30-\left(1\frac{2}{3}\right)x$;

conséquemment $z-\left(\frac{z}{5}+4\right)+\left(\frac{y}{4}+3\right)=26-\left(1\frac{1}{3}\right)x$, 89 r°.

donc $26-\left(1\frac{1}{3}\right)x=8+\frac{x}{3}$;

$$x=10\frac{4}{5},\ y=12,\ z=12;$$

$$x+y+z=34\frac{4}{5}.$$

Or, en augmentant y de 4, la somme $x+y+z$ s'est augmentée de 15, de sorte qu'à chaque unité du premier nombre correspondent $\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ unités du second. Mais on désirait obtenir une augmentation de $30\frac{1}{5}$, au lieu de 15, ce qui donne, pour augmentation de y, $\frac{30\frac{1}{5}}{3\frac{3}{4}}=8\frac{4}{75}$;

* Comparer Diophante, l'énoncé de II, 19.

conséquemment, posons $y = 16\frac{4}{75}$;

on aura $y - \left(\frac{y}{4} + 3\right) + \left(\frac{x}{3} + 2\right) = 11\frac{3}{75} + \frac{x}{3}$,

donc $x - \left(\frac{x}{3} + 2\right) + \left(\frac{z}{5} + 4\right) = 11\frac{3}{75} + \frac{x}{3}$,

89 v°. ou $z = 45\frac{15}{75} - (1\frac{2}{3})x$;

conséquemment $z - \left(\frac{z}{5} + 4\right) = 32\frac{12}{75} - (1\frac{1}{3})x$,

et $\frac{y}{4} + 3 = 7\frac{1}{75}$;

donc $39\frac{13}{75} - (1\frac{1}{3})x = 11\frac{3}{75} + \frac{x}{3}$;

$x = 16\frac{66}{75},\ y = 16\frac{4}{75},\ z = 17\frac{5}{75}$.

(41) $x^2 - y^2 = 2(y^2 - z^2)$ *.

Posons $y^2 = z^2 + 2z + 1$,

on aura $x^2 = z^2 + 6z + 3$;

posons $x = z + 2$,

90 r°. on obtient $z^2 + 6z + 3 = z^2 + 4z + 4$; $z = \frac{1}{2}$;

$z^2 = \frac{1}{4},\ y^2 = 2\frac{1}{4},\ x^2 = 6\frac{1}{4}$.

(42) $(x + y + z) - x^2 = t^2, \quad (x + y + z) - y^2 = v^2, \quad (x + y + z) - z^2 = w^2$ **.

Posons $y = 2x,\ x + y + z = 5x^2$;

on aura $t^2 = (2x)^2,\ v^2 = x^2$.

Ensuite divisons 5 en deux nombres carrés autres que 1, 4, problème résolu ci-dessus;

on aura $5 = \frac{4}{25} + \frac{121}{25}$.

Posons $z = \frac{2}{5}x$,

on obtient $3x + \frac{2}{5}x = 5x^2$;

donc $x = \frac{17}{25},\ y = \frac{34}{25},\ z = \frac{6\frac{4}{5}}{25}$.

* Comparer Diophante, II, 20. — ** *Ibid.* III, 1.

(43) $(x+y+z)^2+x=t^2, \quad (x+y+z)^2+y=v^2, \quad (x+y+z)^2+z=w^2$ [*].

Posons $(x+y+z)=x_1,\ x=3x_1^2,\ y=8x_1^2,\ z=15x_1^2;$

on aura $x_1=26x_1^2,\ x_1=\frac{1}{26},\ x_1^2=\frac{1}{676};$ 90 v°.

$$x=\frac{3}{676},\ y=\frac{8}{676},\ z=\frac{15}{676}.$$

(44) $(x+y+z)^2-x=t^2, \quad (x+y+z)^2-y=v^2, \quad (x+y+z)^2-z=w^2$ [**].

Posons $x+y+z=4x_1,\ x=12x_1^2,\ y=7x_1^2,\ z=15x_1^2;$

on aura $4x_1=34x_1^2,\ x_1=\frac{2}{17},\ x_1^2=\frac{4}{289};$

$$(x+y+z)^2=\frac{64}{289},\ x=\frac{48}{289},\ y=\frac{28}{289},\ z=\frac{60}{289}.$$

(45) $x+y+z=t^2, \quad x+y=z+u^2, \quad y+z=x+v^2, \quad z+x=y+w^2$ [***]. 91 r°.

Posons $t^2=x_1^2+2x_1+1,\ u^2=1;$

on aura $x+y=\frac{1}{2}x_1^2+x_1+1,\ z=\frac{1}{2}x_1^2+x_1.$

Ensuite posons $v^2=x_1^2;$

on aura $y+z=x_1^2+x_1+\frac{1}{2},\ x=x_1+\frac{1}{2}.$

En même temps on avait $x+y+z=x_1^2+2x_1+1,$

donc $y=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}.$

Enfin on a $2x_1=w^2;$

posons $w^2=16,$

on aura $x_1=8;$

$$x=8\tfrac{1}{2},\ y=32\tfrac{1}{2},\ z=40.$$

Autre méthode [****]. On résout $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\delta^2$, ce qui est facile. On trouve, par exemple $36+9+4=49$.

Ensuite résolvons $\varepsilon+\zeta=\eta+36,\ \zeta+\eta=\varepsilon+9,\ \eta+\varepsilon=\zeta+4;$

on aura $\varepsilon=20,\ \zeta=22\tfrac{1}{2},\ \eta=6\tfrac{1}{2}.$

Ces nombres satisfont aux conditions ci-dessus. La raison de cela c'est que

$$x+y+z=u^2+v^2+w^2.$$ 91 v°.

[*] Comparer Diophante, III, 2. — [**] *Ibid.* III, 3. — [***] *Ibid.* III, 5. — [****] *Ibid.* III, 6.

(46) $x+y+z=t^2,\quad x+y=u^2,\quad y+z=v^2,\quad z+x=w^2$ *.

Posons $t^2=x_1^2+2x_1+1,\ x+y=x_1^2,\ y+z=x_1^2+1-2x_1;$

on aura $z=2x_1+1,\ x=4x_1,\ y=x_1^2-4x_1,$

et $6x_1+1=w^2;$

comme on a $y=x_1^2-4x_1,$

d'où il suit que $x_1>4,$

il faut choisir w de sorte que $w^2>25;$

prenons $w^2=121,$

on aura $x_1=20,$

$$x=80,\ y=320,\ z=41.$$

(47) $x-y=z-x,\quad x+y=t^2,\quad y+z=v^2,\quad z+x=w^2$ **.

Cherchons d'abord trois nombres carrés satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\gamma^2-\beta^2=\beta^2-\alpha^2,\ \alpha^2+\beta^2>\gamma^2,\ \beta^2+\gamma^2>\alpha^2,\ \gamma^2+\alpha^2>\beta^2.$$

Posons $x_1^2=\alpha^2,\ x_1^2+2x_1+1=\beta^2,\ x_1^2+4x_1+2=\gamma^2;$

92 r°. prenons γ de sorte qu'on obtienne $x_1^2>2x_1+1$, afin qu'on ait $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2;$

disons $\gamma=x_1-8,$

on aura $x_1^2+4x_1+2=x_1^2+64-16x_1,$

ou $x_1=\frac{31}{10};$

$$x_1^2=\tfrac{961}{100}=\alpha^2,\ \beta^2=\tfrac{1681}{100},\ \gamma^2=\tfrac{2401}{100}.$$

Ensuite posons $x+y+z=\xi,$

$$x+y=961,\ y+z=1681,\ z+x=2401;$$

on aura $z=\xi-961,\ x=\xi-1681,\ [y=\xi-2401];$

donc $x+y+z=3\xi-5043=\xi,$

ou $\xi=2521\frac{1}{2};$

$$z=1560\tfrac{1}{2},\ x=840\tfrac{1}{2},\ y=120\tfrac{1}{2}.$$

* Comparer Diophante, III, 7. — ** *Ibid.* III, 9.

(48) $x+y+3=t^2,\quad y+z+3=u^2,\quad z+x+3=v^2,\quad x+y+z+3=w^2$ [*]. 92 v°.

Posons $x+y=x_1^2+4x_1+1$, $[y+z=x_1^2+6x_1+6,]$ $x+y+z=x_1^2+8x_1+13$;

on aura $z=4x_1+12,\ x=2x_1+7,\ y=x_1^2+2x_1-6$;

donc $z+x+3=6x_1+22=v^2$;

posons $v^2=49$,

on obtient $x_1=4\frac{1}{2}$,

$$x=16,\ y=23\tfrac{1}{4},\ z=30.$$

(49) $x+y-3=t^2,\ y+z-3=u^2,\ z+x-3=v^2,\ x+y+z-3=w^2$ [**].

Posons $x+y=x_1^2+3,\ y+z=x_1^2+2x_1+4,\ x+y+z=x_1^2+4x_1+7$;

on aura $z=4x_1+4,\ x=2x_1+3,\ y=x_1^2-2x_1$; 93 r°.

donc $z+x-3=6x_1+4=v^2$;

posons $v^2=25$,

on obtient $x_1=3\frac{1}{2}$;

$$x=10,\ y=5\tfrac{1}{4},\ z=18.$$

(50) $x\,.\,y+12=t^2,\quad y\,.\,z+12=v^2,\quad z\,.\,x+12=w^2$ [***].

Résolvons d'abord $\alpha^2+12=\mu^2,\ \beta^2+12=\nu^2$;

on trouvera $\alpha^2=\frac{1}{4},\ \beta^2=4$.

Ensuite posons $x=4x_1,\ y=\dfrac{1}{x_1},\ z=\dfrac{x_1}{4}$;

$x\,.\,y+12$ et $y\,.\,z+12$ seront des nombres carrés,

et l'on aura $x\,.\,z+12=x_1^2+12=w^2$;

posons $w=x_1+3$,

il suit $x_1^2+12=x_1^2+6x_1+9,\ x_1=\frac{1}{2}$;

$$x=2,\ y=2,\ z=\tfrac{1}{8}.$$ 93 v°.

[*] Comparer Diophante, III, 10. — [**] *Ibid.* III, 11. — [***] *Ibid.* III, 12.

(51) $x \cdot y - 10 = t^2,\ y \cdot z - 10 = v^2,\ z \cdot x - 10 = w^2$ [*].

Résolvons d'abord $\alpha^2 - 10 = \mu^2,\ \beta^2 - 10 = \nu^2$,

ce qui est facile, par exemple $\alpha^2 = 30\frac{1}{4},\ \beta^2 = 12\frac{1}{4}$.

Ensuite posons $x = (30\frac{1}{4})x_1,\ y = \frac{1}{x_1},\ z = (12\frac{1}{4})x_1$;

$x \cdot y - 10$ et $y \cdot z - 10$ seront des nombres carrés,

et l'on aura $x \cdot z - 10 = 370\frac{9}{16}x_1^2 - 10 = w^2$,

ou $5929x_1^2 - 160 = w'^2$;

posons $w' = 77x_1 - 2$,

il suit $5929x_1^2 - 160 = 5929x_1^2 + 4 - 308x_1,\ x_1 = \frac{164}{308}$;

94 r°. $x = \frac{4961}{308},\ y = \frac{308}{164},\ z = \frac{2009}{308}$.

(52) $x \cdot y + z = t^2,\quad y \cdot z + x = v^2,\quad z \cdot x + y = w^2$ [**].

Posons $x \cdot y + z = x_1^2 + 6x_1 + 9,\ z = 9$,

donc $x \cdot y = x_1^2 + 6x_1$;

posons $x = x_1,\ y = x_1 + 6$,

donc $xz + y = 10x_1 + 6,\ yz + x = 10x_1 + 54$,

$$v^2 - w^2 = 48.$$

Mais on trouve facilement deux nombres carrés ayant 48 pour différence, par exemple, 16 et 64;

posons $10x_1 + 6 = 16$,

ou bien $10x_1 + 54 = 64$;

on aura $x = x_1 = 1,\ y = 7,\ z = 9$.

(53) $x \cdot y - z = t^2,\ y \cdot z - x = v^2,\ z \cdot x - y = w^2$ [***].

Posons $y = x + 4,\ z = 4x$;

94 v°. on aura $xy - z = x^2$,

$$xz - y = 4x^2 - (x + 4) = w^2,\ yz - x = 4x^2 + 15x = v^2;$$

$$v^2 - w^2 = 16x + 4.$$

[*] Comparer Diophante, III, 13. — [**] *Ibid.* III, 14. — [***] *Ibid.* III, 15.

Résolvons $\alpha . \beta = 16x + 4$;

on aura $\alpha = 4$, $\beta = 4x + 1$;

puis on aura, soit $\frac{\alpha + \beta}{2} = v$,

soit $\frac{\beta - \alpha}{2} = w$;

donc $v = 2x + 2\frac{1}{2}$, $v^2 = 4x^2 + 6\frac{1}{4} + 10x = 4x^2 + 15x$;

$$6\tfrac{1}{4} = 5x,\ x = 1\tfrac{1}{4},\ y = 5\tfrac{1}{4},\ z = 5.$$

(54) $xy + z^2 = t^2$, $yz + x^2 = v^2$, $zx + y^2 = w^2$ *.

Posons $y = 4x + 4$, $z = 1$;

on aura $xy + z^2 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, $yz + x^2 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$,

$$zx + y^2 = 16x^2 + 16 + 33x = w^2;$$ 95 r°.

posons $w = 4x - 5$,

il suit $16x^2 + 16 + 33x = 16x^2 + 25 - 40x$;

$$x = \tfrac{9}{73},\ y = \tfrac{328}{73},\ z = \tfrac{73}{73}.$$

(55) $x . y + x + y = t^2$, $y . z + y + z = v^2$, $z . x + z + x = w^2$ **.

Posons $x = 4$, $y = 9$, parce que $a^2 . (a + 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2$ est toujours un nombre carré ***;

on aura $5z + 4 = w^2$, $10z + 9 = v^2$,

$$v^2 - w^2 = 5z + 5.$$

Résolvons $\alpha\beta = 5z + 5$,

disons $\alpha = 5$, $\beta = z + 1$;

on aura $v^2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \left(3 + \frac{z}{2}\right)^2 = 9 + \frac{z^2}{4} + 3z = 10z + 9$, 95 v°.

$$\frac{z^2}{4} = 7z, \quad \text{ou} \quad z = 28.$$

On serait arrivé au même résultat en posant $w^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = 5z + 4$.

* Comparer Diophante, III, 16.

** *Ibid.* III, 17.

*** $a^2 (a + 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 = (a . \{a + 1\})^2 + 2a(a + 1) + 1 = (a\{a + 1\} + 1)^2$.

(56) $xy-(x+y)=t^2, \quad yz-(y+z)=v^2, \quad zx-(z+x)=w^2$ *.

Cherchons d'abord deux nombres α, β tels que $\alpha.\beta-(\alpha+\beta)=\mu^2$, et $16\alpha-16=4\beta-4$, où l'on pourrait prendre en place de 4, 16 aussi bien deux autres nombres carrés.

Posons donc $\alpha=x_1+1, \ \beta=4x_1+1;$

on obtient $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=4x_1^2-1=\mu^2;$

posons $\mu=2x_1-2,$

donc $4x_1^2-1=4x_1^2+4-8x_1,$

et $x_1=\frac{5}{8},$

$$\alpha=\frac{13}{8}, \ \beta=\frac{28}{8}.$$

Maintenant posons $x=\frac{13}{8}, \ y=\frac{28}{8};$

96 r°. on aura $\frac{5}{8}z-\frac{13}{8}=w^2$ et, en multipliant par 16, $10z-26=w_1^2,$

$\frac{20}{8}z-\frac{28}{8}=v^2$ et, en multipliant par 4, $10z-14=v_1^2;$

donc $v_1^2-w_1^2=12.$

Prenons deux nombres dont le produit soit 12, disons 2 et 6;

on aura $\left(\frac{2+6}{2}\right)^2$ ou $16=10z-14,$

donc $z=3;$

et l'on serait arrivé au même résultat en posant $\left(\frac{6-2}{2}\right)^2=10z-26.$

96 v°. (57) $xy+x=t^2, \quad xy+y=v^2, \quad xy+x+y=w^2$ **.

Posons $y=4x-1;$

$xy+x$ sera un carré;

puis on aura $xy+y=4x^2+3x-1=v^2, \ xy+x+y=4x^2+4x-1=w^2,$

$$w^2-v^2=x.$$

Prenons deux nombres dont le produit soit x, disons $4x$ et $\frac{1}{4}$;

on aura $\left(\frac{4x+\frac{1}{4}}{2}\right)^2=4x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{64}=w^2=4x^2+4x-1;$

$$x=\frac{65}{224}, \ y=\frac{36}{224}.$$

* Comparer Diophante, III, 19. — ** *Ibid.* III, 20.

(58) $xy - x = t^2, \quad xy - y = v^2, \quad xy - (x+y) = w^2$ *. 97 r°.

Posons $x = x_1 + 1,\ y = 4x_1;$

$xy - y$ sera un carré;

puis on aura $xy - x = 4x_1^2 + 3x_1 - 1 = t^2,\ xy - (x+y) = 4x_1^2 - x_1 - 1 = w^2,$

$$t^2 - w^2 = 4x_1.$$

Prenons deux nombres dont le produit soit $4x_1$, disons $4x_1$ et 1;

on aura $\left(\frac{4x_1+1}{2}\right)^2 = 4x_1^2 + 2x_1 + \frac{1}{4} = t^2 = 4x_1^2 + 3x_1 - 1,\ x_1 = 1\frac{1}{4};$

$$x = 2\tfrac{1}{4},\ y = 5.$$

(59) $x + y = 10, \quad x + t^2 = v^2, \quad y + t^2 = w^2$ **.

Posons $x = 2t + 1,\ y = 4t + 4;$

on aura $x + y = 6t + 5 = 10\ [x = \frac{16}{6},\ y = \frac{44}{6},\ t = \frac{5}{6}];$

et pour résoudre $x + y = 10,\ t^2 - x = v^2,\ t^2 - y = w^2$ ***,

posons $t^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1,\ x = 2x_1 + 1,\ y = 4x_1;$

on aura $6x_1 + 1\ [= 10,\ x = 4,\ y = 6,\ t = \frac{5}{2}].$

(60) $[(x+y+z+t)^2 + x = m^2, \quad (x+y+z+t)^2 - x = m_1^2,$

$(x+y+z+t)^2 + y = n^2, \quad (x+y+z+t)^2 - y = n_1^2,$

$(x+y+z+t)^2 + z = p^2, \quad (x+y+z+t)^2 - z = p_1^2,$

$(x+y+z+t)^2 + t = q^2, \quad (x+y+z+t)^2 - t = q_1^2$ ****.]

On sait que si l'on désigne l'hypoténuse et les deux cathètes d'un triangle rectangle par h, k_1, k_2 respectivement, on a $h^2 + 2k_1k_2 = \mu^2$, $h^2 - 2k_1k_2 = \nu^2$. Il 97 v°. s'agit donc de trouver quatre triangles rectangles ayant tous la même hypoténuse, mais des cathètes différentes. Prenons d'abord deux triangles rectangles quelconques, disons 3, 4, 5 et 5, 12, 13; on sait qu'alors 39, 52, 65 et 25, 60, 65 seront aussi des triangles rectangles. On a donc deux des quatre triangles cherchés. Maintenant, résolvons deux fois $\alpha^2 + \beta^2 = 65^2$ par des nombres autres que 39, 52 ou 25, 60; disons 33, 56 et 16, 63.

* Comparer Diophante, III, 21.

** *Ibid.* III, 24.

*** *Ibid.* III, 23.

**** *Ibid.* III, 22.

98 r°. Ensuite posons $x+y+z+t=65x_1$,

$$x=2(16x_1 \cdot 63x_1)=2016x_1^2,\quad z=2(60x_1 \cdot 25x_1)=3000x_1^2,$$
$$y=2(33x_1 \cdot 56x_1)=3696x_1^2,\quad t=2(39x_1 \cdot 52x_1)=4056x_1^2;$$

donc $65x_1=12768x_1^2$, ou $x_1=\frac{65}{12768}$, $x_1^2=\frac{4225}{[163021824]}$;

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{8517600}{d},\ y=\frac{15615600}{d}, \\ z=\frac{12675000}{d},\ t=\frac{17136600}{d}. \end{array}\right\}[d=163021824]$$

CINQUIÈME SECTION.

(1) $x^3+y^3=z^2$.

98 v°. Posons $y=2x$,

on aura $9x^3=z^2$;

posons $z=3x$,

il suit $9x^2=9x^3$, $x=1$;

$$x^3=1,\ y^3=8,\ z^2=9.$$

(2) $x^3-y^3=z^2$.

Posons $x^3=(2y)^3$,

on aura $7y^3=z^2$;

posons $z=7y$,

il suit $49y^2=7y^3$, $y=7$;

$$x^3=2744,\ y^3=343,\ z^2=2401.$$

(3) $x^2+y^2=z^3$.

Posons $y=2x$,

on aura $5x^2=z^3$; [posons $z=x$],

il suit $x=5$;

$$x^2=25,\ y^2=100,\ z^3=125.$$

(4) $x^2 - y^2 = z^3.$

Posons $x^2 = 4y^2,$

on aura $3y^2 = z^3$ [posons $z = y$],

il suit $y = 3;\ y^2 = 9,\ x^2 = 36,\ z^3 = 27.$

(5) $x^2 \cdot y^2 = z^3.$

Posons $y^2 = 4x^2,$

on aura $4x^4 = z^3;$ [et, en posant $z = x$],

$x = \frac{1}{4};\ x^2 = \frac{1}{16},\ y^2 = \frac{4}{16},\ z^3 = \frac{1}{64}.$ 99 r°.

(6) $x^2 \cdot y^3 = z^2.$

Posons $y^3 = 8x^3,$

on aura $8x^5 = z^2;$

posons $z = 4x^2,$

il suit $8x^5 = 16x^4,\ x = 2;$

$x^2 = 4,\ y^3 = 64,\ z^2 = 256.$

(7) $x^2 \cdot y^3 = z^3.$

Posons $y = x,$

on aura $x^5 = z^3;$

posons $z = x^2,$

il suit $x^5 = x^6,\ x = 1,\ x^2 = 1,\ y^3 = 1,\ z^3 = 1.$

(8) $x^3 \cdot y^3 = z^2.$

Posons $y^3 = 8x^3,$

donc $8x^6 = z^2.$

Il faut maintenant qu'on pose cela égal au produit de deux nombres, l'un carré, l'autre cube, sous lesquels est contenu un nombre carré, pro-

blème qu'on vient de résoudre*. Recommençons donc le problème et

posons $y^2 = 64x^3$,

99 v°. donc $x^3y^2 = 64x^6 = z^2$;

posons $z = 16x^2$;

il suit $64x^6 = 256x^4$,

ou $256 = 64x^2$, $x^2 = 4$, $x = 2$;

$$x^3 = 8, \quad y^2 = 512, \quad z^2 = 4096.$$

(9) $x^3 + 10x^2 = y^2$.

Prenons y de sorte que $y^2 > 10x^2$,

disons $y = 4x$;

on aura $x^3 + 10x^2 = 16x^2$, $x = 6$;

$$x^3 = 216, \quad 10x^2 = 360, \quad y^2 = 576 = \overline{24}^2.$$

(10) $x^3 - 10x^2 = y^2$.

Posons $y = x$,

on aura $11x^2 = x^3$,

ou $x = 11$;

$$x^3 = 1331, \quad 10x^2 = 1210, \quad y^2 = 121 = \overline{11}^2.$$

(11) $5x = y^2$, $10x = z^3$.

On a $\frac{y^2}{5} = \frac{z^3}{10}$,

100 r°. donc $z^3 = 2y^2$, et, [en posant $y = z$],

$$z = 2; \quad y^2 = 4, \quad z^3 = 8, \quad x = \tfrac{4}{5};$$

si l'on ne veut pas qu'il soit $y = z$, posons $y = 2z$;

on aura $z^3 = 8z^2$, $z = 8$, $z^3 = 512$, $y^2 = 256$, $x = 51\tfrac{1}{5}$.

* On avait résolu $x_1^2 \cdot y_1^3 = z_1^2$ (n° 6).
Or, en posant $y^3 = y_1^3 \cdot x^3$, $z = z_1 \cdot x^2$,
on aura $x^3 \cdot y^3 = y_1^3 \cdot x^6$, $z^2 = z_1^2 \cdot x^4 = x_1^2 \cdot y_1^3 \cdot x^4$;
donc $y_1^3 \cdot x^6 = x_1^2 \cdot y_1^3 \cdot x^4$,
ou $x^2 = x_1^2$.
La substitution indiquée par l'auteur est donc réellement nécessaire, afin que x ne devienne pas irrationnel.

(12) $10x = y^2, \quad 5x = z^3.$

On a $y^2 = 2z^3;$

posons $y^2 = 4z^2,$

donc $2z^2 = z^3, \ z = 2;$

$$z^3 = 8, \ y^2 = 16, \ x = 1\tfrac{3}{5}.$$

Autre méthode. Posons $y = \frac{1}{n}z$, ou $= nz$, par exemple $= 2z$.

On aura dans le problème n° 11, $\frac{4}{5}z^2 = x,$

dans le problème n° 12, $\frac{4}{10}z^2 = x.$

Donc, dans le n° 11, $10 \cdot \frac{4}{5}z^2$ ou $8z^2 = z^3, \ z = 8;$ 100 v°.

$$z^3 = 512, \ y^2 = 256,$$

$$x = \frac{z^3}{10} \text{ ou } = \frac{y^2}{5}.$$

Dans le n° 12, on aura $\frac{2}{5}z^2 = x$, $5x$ ou $2z^2 = z^3, \ z = 2;$

$$z^3 = 8, \ y^2 = 16,$$

$$x = \frac{y^2}{10} = \frac{16}{10}.$$

Les équations proposées étant

$$ax = y^2, \ bx = z^3,$$

on peut aussi poser $\frac{z^2}{b} \cdot a = z^2$ ou $= (nz)^2;$

dans le premier cas on aura $\frac{z^2}{a} \cdot b = z^3.$

(13) $x^2 = \frac{1}{3}y^3.$

Posons $x = y,$

donc $x^3 = 3x^2, \ x = 3; \ x^2 = 9, \ x^3 = 27.$

(14) $x^3 = \frac{1}{3}y^2.$

Posons encore $x = y,$

donc $\frac{1}{3}x^2 = x^3, \ x = \frac{1}{3}; \ x^2 = \frac{1}{9}, \ x^3 = \frac{1}{27}.$

Mais si l'on ne veut pas qu'il soit $x = y$, posons :

N° 13. $x = 2y,$

donc $4y^2 = \frac{1}{3}y^3,\ y^3 = 12y^2,\ y = 12;$

101 r°. $y^3 = 1728,\ x^2 = 576.$

N° 14. $y = 2x,$

donc $4x^3 = 3x^4,\ x = 1\frac{1}{3};$

$$x^3 = \frac{64}{27},\ y^3 = \frac{512}{27}.$$

(15) $10x = z^3,\ 10y = z.$

Posons $x = ny^2,$

disons $= 200y^2;$

on aura $2000y^2 = z^3,\ 10y = z;$

de cette dernière équation il suit $1000y^3 = z^3,$

donc $2000y^2 = 1000y^3,\ y = 2,\ x = 800.$

On peut aussi prendre un cube quelconque et son côté; l'un et l'autre divisés par 10, donnent respectivement les deux nombres cherchés.

(16) $x = \frac{1}{9}y,\quad 4x^2 = z,\quad 4y^2 = z^3.$

Pour que le problème puisse être résolu, il est nécessaire que 4 . 9 soit un carré *.

101 v°. On a $y^2 = 81x^2,$

donc $324x^2 = z^3,$

et $4x^2 = z;$

conséquemment $64x^6 = 324x^2,$

ou $64x^4 = 324;$

$$x^4 = 5 + \frac{1}{16},\ x = 1\frac{1}{2},\ y = 13\frac{1}{2};$$

$$x^2 = 2\frac{1}{4},\ y^2 = 182\frac{1}{4},\ z = 9,\ z^3 = 729.$$

* En effet, les équations proposées étant

$$x = \frac{1}{a}y,\quad bx^2 = z,\quad by^2 = z^3,$$

on a $b^3x^6 = a^2bx^2,$

ou $b^2x^4 = a^2,\ x = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab};$

on voit donc que x ne sera rationnel qu'autant que ab est un nombre carré.

(17) $x = 3y,\quad 8x^3 = z^2,\quad 8y^3 = z.$

Ici, il faut que le facteur commun (à savoir 8) soit un cube*.

On a $$x^3 = 27y^3,$$

donc $$216y^3 = 64y^6,\ 216 = 64y^3,\ y^3 = 3\tfrac{3}{8};$$

$$y = 1\tfrac{1}{2},\ x = 4\tfrac{1}{2},\ x^3 = 91\tfrac{1}{8},\ [y^3 = 3\tfrac{3}{8},\ z^2 = 729,\ z = 27].$$ 102 r°.

(18) $ax^3 = t^2,\quad bx^2 = t.$

Ce problème ne peut être résolu qu'autant qu'on a $\frac{a}{b^2}$ égal à un nombre carré**.

Conséquemment, posons $a = 64,\ b = 2;$

on aura $64x^2 = (2x^2)^2 = 4x^4,\ 64 = 4x^2,\ x^2 = 16,\ x = 4;\ t^2 = 1024,\ t = 32.$

(19) $ax^3 = y^2,\quad bx^3 = y.$

On a $$bx^3 = \sqrt{ax^3},$$ 102 v°.

donc $$b^2x^6 = ax^3,\ x^3 = \frac{a}{b^2},\ x = \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}};$$

il faut donc que $\frac{a}{b^2}$ soit un nombre cube.

Posons $$a = 32,\ b = 2;$$

on aura $$2x^3 = \sqrt{32x^3};$$

mais on sait que $$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n};$$

donc $$\frac{32x^3}{2x^3} = 2x^3,$$

ou $$16 = 2x^3;$$

donc $$x^3 = 8,\ x = 2.$$

* En effet, les équations proposées étant

$$x = my,\quad nx^3 = z^2,\quad ny^3 = z,$$

on aura $m^3 . n . y^3 = n^2y^6,$

ou $m^3 = ny^3,$

donc $$y = \frac{m}{\sqrt[3]{n}};$$

il faut donc que n soit un nombre cube.

** Puisque $\frac{a}{b^2} = x^2.$

(20) $ax^3 = y^3, \quad bx^2 = y.$

Posons $a = 64, \ b = 1;$

on aura $x^2 = \sqrt[3]{64x^3};$

mais $\frac{n^3}{n} = n^2;$

donc $\frac{64x^3}{x^3} = x^6,$

ou $64 = x^6, \ x^3 = 8.$

Ici, il faut que $\frac{a}{b^3}$ * soit un nombre dont la racine carrée est un cube.

(21) $x^4 + y^4 = z^3.$

Posons $y^2 = n^2x^2,$

disons $= 4x^2;$

on aura $17x^4 = z^3;$

posons $z = 3x;$

103 r°. il suit $17x^4 = 27x^3; \ x = \frac{27}{17}, \ y = \frac{54}{17}.$

(22) $x^4 - y^4 = z^3.$

Posons $x^2 = n^2y^2,$

disons $= 4y^2;$

on aura $15y^4 = z^3;$

posons $z = 3y,$

et, puisque $\frac{n^3}{n} = n^2,$

on obtient $\frac{15y^4}{3y} = 9y^2, \ 5y^3 = 9y^2;$

donc $y = 1\frac{4}{5}, \ x = 3\frac{3}{5}.$

* Le texte porte : « le nombre majeur divisé par le *carré* du nombre mineur. » Il fallait dire *cube*. On a $ax^3 = b^3x^6,$ donc $x^3 = \sqrt{\frac{a}{b^3}}.$

(23) $x^2 + y^3 = z^2$.

Posons $x^2 = n^2 y^2$,

disons $= y^2$;

on aura $y^2 + y^3 = z^2$;

posons $z = ny$,

disons $= 3y$;

il suit $y^2 + y^3 = 9y^2$, $y = 8$; $x^2 = 64$, $y^3 = 512$, $z = 24$.

(24) $x^3 - y^2 = z^2$.

Posons $y^2 = n^2 x^2$,

disons $= x^2$;

on aura $x^3 - x^2 = z^2$;

posons $z = 3x$;

donc $x^3 - x^2 = 9x^2$, $x = 10$; $x^3 = 1000$, $y^2 = 100$, $z = 30$. 103 v°.

(25) $x^2 - y^3 = z^2$.

Posons $y = x$,

on aura $x^2 - x^3 = z^2$;

posons $z = \frac{1}{2}x$,

parce que si l'on posait $z = x$ ou $= nx$, on aurait $z^2 > x^2 - x^3$;

il suit $x^2 - x^3 = \frac{1}{4}x^2$, $x = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$, $x^2 = \frac{9}{16}$, $y^3 = \frac{27}{64}$, $z = \frac{3}{8}$.

(26) $x^2 + y^2 = z^3$.

Posons $y^2 = 4x^2$,

on aura $x^2 + 4x^2 = z^3$;

posons $z = 2x$,

il suit $x^2 + 4x^2 = 8x^3$; $x = \frac{5}{8}$, $x^3 = \frac{125}{512}$, $y^2 = \frac{25}{16}$.

(27) $x^3 - y^2 = z^3$.

Posons $y^2 = 4x^2$, $z = \frac{1}{2}x$;

on aura $x^3 - 4x^2 = \frac{1}{8}x^3$;

donc $x = 4\frac{4}{7}$, $y = 9\frac{1}{7}$,

104 r°. $y^2 = \frac{4096}{49}$, $x^3 = \frac{32768}{343}$.

(28) $(x^3)^2 + 5y^2 = z^2$.

Posons $y = nx^2$;

disons $= 2x^2$;

on aura $x^6 + 20x^4 = z^2$.

Posons $z = mx^2$, en prenant m de sorte que $m^2 - 20$ soit un nombre carré;

résolvons donc $\alpha^2 + 20 = \beta^2$;

on trouve $\alpha^2 = 16$, $\beta^2 = 36$, $\beta = 6$.

Conséquemment, posons $z = 6x^2$;

on aura $x^6 + 20x^4 = 36x^4$,

$x^2 = 16$, $x = 4$; $y^2 = (2x^2)^2 = 1024$, $x^3 = 64$.

(29) $(x^2)^2 + 10y^3 = z^2$.

Posons $x^2 = 4y^2$,

on aura $16y^4 + 10y^3 = z^2$;

posons $z = 6y^2$.

donc $16y^4 + 10y^3 = 36y^4$; $y = \frac{1}{2}$, $x^2 = 1$, $y^3 = \frac{1}{8}$.

(30) $(x^2)^2 + (y^3)^3 = z^2$.

104 v°. Posons $x^2 = 4y^4$,

on aura $16y^8 + y^9 = z^2$;

posons $z = 6y^4$,

donc $16y^8 + y^9 = 36y^8$; $y = 20$, $y^3 = 8000$, $x^2 = 640000$.

(31) $(x^3)^3 - (y^3)^2 = z^2.$

Posons $y^3 = 4x^4,$

on aura $x^9 - 16x^8 = z^2;$

posons $z = 2x^4,$

donc $x^9 - 16x^8 = 4x^8;\ x = 20,\ x^3 = 8000,\ y^3 = 640000.$

(32) $(x^2)^2 - (y^3)^3 = z^2.$

Posons $x^2 = 4y^4,$

on aura $16y^8 - y^9 = z^2;$

posons $z = 2y^4,$

et, comme on a $\frac{n^2}{n} = n,$

il suit $\frac{16y^8 - y^9}{2y^4} = 2y^4,$

ou $8y^4 - \frac{1}{2}y^5 = 2y^4,\ y = 12;$

$y^3 = 1728,\ x = 288,\ x^2 = 82944.$ 105 r°.

(33) $(x^3)^3 + 5x^3 \cdot y^2 = z^2.$

Posons $y = 2x^3,$

on aura $21x^9 = z^2;$

posons $z = 7x^4,$

il suit $21x^9 = 49x^8;\ x = \frac{7}{3},\ x^3 = \frac{343}{27},\ y^2 = \frac{470596}{729}.$

(34) $(x^3)^3 - 3x^3 \cdot y^2 = z^2.$

Posons $y = \frac{1}{2}x^3,$

on aura $\frac{1}{4}x^9 = z^2;$

posons $z = x^4,$

il suit $\frac{1}{4}x^9 = x^8;\ x = 4,\ x^3 = 64,\ y^2 = 1024.$

(35) $x^3+y^2=z^2, \quad x^3-y^2=t^2.$

Posons $y^2=4x^2$;

105 v°. on aura $x^3+4x^2=z^2,\ x^3-4x^2=t^2,$

$$z^2-t^2=8x^2;$$

posons $z-t=2x$;

il suit $t=x,\ x^3-4x^2=x^2$;

$$x=5,\ y^2=100,\ x^3=125.$$

(36) $x^2-y^3=z^2, \quad x^2+y^3=t^2.$

Posons $x^2=4y^2$;

on aura $4y^2-y^3=z^2,\ 4y^2+y^3=t^2$;

posons $z=my,\ t=ny$;

il suit $y^3=m_1y^2,\ y^3=n_1y^2,$

ou $y=m_1$, et $y=n_1$;

il faut donc qu'on ait $m_1=n_1$.

Or on a $m_1=4-m^2,\ n_1=n^2-4$;

il faut donc qu'on ait $4-m^2=n^2-4$,

ou $m^2+n^2=8$;

on trouve $m^2=\frac{4}{25},\ n^2=\frac{196}{25}$.

Maintenant posons $4y^2-y^3=\frac{4}{25}y^2$;

106 r°. il suit $y=3\frac{21}{25}$;

et l'on serait arrivé au même résultat en posant $4y^2+y^3=\frac{196}{25}y^2$.

Donc $x=\frac{192}{25},\ x^2=\frac{36864}{625},\ y^3=\frac{884736}{15625}.$

(37) $x^3+4x^2=y^2,\ x^3-5x^2=z^2.$

On a $y^2-z^2=9x^2,$

et l'on pourrait maintenant employer la méthode de l'égalité double. On

peut aussi résoudre $y_1^2 - z_1^2 = 9$,

ce qui donne 25, 16, et puis poser $x^3 + 4x^2 = 25x^2$;

donc $x = 21$,

ou bien $x^3 - 5x^2 = 16x^2$,

ce qui donne également $x = 21$;

donc $x^2 = 441$, $x^3 = 9261$.

(38) $x^3 + 5x^2 = y^2$, $x^3 + 10x^2 = z^2$.

On peut maintenant employer l'égalité double. Mais on peut aussi poser

$$y^2 = m^2x^2, \ z^2 = n^2x^2,$$

ce qui donne $x = m^2 - 5$, $x = n^2 - 10$; 106 v°.

et il faudra qu'on ait $m^2 - 5 = n^2 - 10$,

ou $m^2 + 5 = n^2$;

on trouve $m^2 = 53\frac{7}{9}$, $n^2 = 58\frac{7}{9}$.

Maintenant posons, soit $x^3 + 5x^2 = (53\frac{7}{9})x^2$,

soit $x^3 + 10x^2 = (58\frac{7}{9})x^2$;

l'un et l'autre donne $x = 48\frac{7}{9}$, $x^2 = \frac{192721}{81}$, $x^3 = \frac{\frac{84604519}{9}}{9}$.

(39) $x^3 - 5x^2 = y^2$, $x^3 - 10x^2 = z^2$.

En posant $y = mx$, $z = nx$, on sera amené, comme ci-dessus, à chercher deux nombres carrés m^2, n^2 tels que $n^2 + 5 = m^2$,

disons $n^2 = 4$, $m^2 = 9$;

on posera, ou bien $x^3 - 5x^2 = 9x^2$,

ou bien $x^3 - 10x^2 = 4x^2$;

l'un et l'autre donne $x = 14$;

donc $x^2 = 196$, $x^3 = 2744$. 107 r°.

(40) $3x^2 - x^3 = y^2,\ 7x^2 - x^3 = z^2.$

En posant $y = mx,\ z = nx,$

de telle sorte que $m^2 < 3,\ n^2 < 7,$

il faudra, comme ci-dessus, qu'on ait $3 - m^2 = 7 - n^2,$

ou $n^2 = 4 + m^2;$

on trouve $m^2 = 2\frac{1}{4},\ n^2 = 6\frac{1}{4}.$

Maintenant on posera, ou bien $3x^2 - x^3 = (2\frac{1}{4})x^2,$

ou bien $7x^2 - x^3 = (6\frac{1}{4})x^2;$

l'un et l'autre donne $x = \frac{3}{4};$

donc $x^2 = \frac{9}{16},\ x^3 = \frac{27}{64}.$

(41) $(x^2)^2 - y^3 = z^2,\quad (x^2)^2 + y^3 = t^2.$

Posons $x^2 = 4x_1^2,\ y = 4x_1;$

on aura $16x_1^4 - 64x_1^3 = z^2,\ 16x_1^4 + 64x_1^3 = t^2.$

117 v°. En posant $z = mx_1^2,\ t = nx_1^2,$

il faudra qu'on ait $16 - m^2 = n^2 - 16;$

en même temps il faut qu'on ait $m^2 < 16,\ n^2 > 16;$

il s'agit donc de résoudre $m^2 + n^2 = 32;$

on trouve $m^2 = \frac{16}{25},\ n^2 = 31\frac{9}{25}.$

Maintenant posons, ou bien $16x_1^4 + 64x_1^3 = (31\frac{9}{25})x_1^4,$

ou bien $16x_1^4 - 64x_1^3 = \frac{16}{25}x_1^4,$

l'un et l'autre donne $x_1 = \frac{1600}{384} = \frac{25}{6};$

$x^2 = \frac{2500}{36},\ y^3 = \frac{1000000}{216}.$

(42) $x^3 + (y^2)^2 = z^2,\ x^3 - (y^2)^2 = t^2.$

En procédant comme dans le problème précédent, on aura

$$64x_1^6 + 16x_1^4 = z^2,\ 64x_1^6 - 16x_1^4 = t^2,$$

et en posant $z = mx_1^2,\ t = nx_1^2.$ 1081*.

il faudra chercher deux nombres carrés m^2, n^2 tels que $m^2 = n^2 + 32$;

on trouve $m^2 = 36,\ n^2 = 4.$

Ensuite on pose, soit $64x_1^3 - 16x_1^4 = 4x_1^4.$

donc $x_1 = 3\frac{1}{5}$;

soit $64x_1^3 + 16x_1^4 = 36x_1^4,$

ce qui donne également $x_1 = 3\frac{1}{5}$;

donc $y^3 = \frac{\frac{1024}{5}}{5},\ x^2 = \frac{[illegible]}{125}.$

(43) $ax^3 = y^2,\quad bx^3 = y^4.$

Ici, il faut que $\frac{a}{b^2}$ soit un nombre cube.

Posons $a = 32,\ b = 2$;

on aura $2x^3 = \sqrt{32x^3}$;

donc $\frac{32x^3}{2x^3} = 2x^3,$

ou $16 = 2x^3,\ x^3 = 8.$

On voit qu'on a divisé 32 successivement deux fois par 2 pour obtenir le cube, c'est à-dire qu'on a divisé 32 par le carré de 2; de là, la condition ci-dessus.

* Ce problème est identique avec le 19e de cette section.

CONCLUSION.

Fin du livre Alfakhri, qui contient les éléments de l'algèbre et les éléments des problèmes. Louanges sans bornes et sans fin à celui qui donne l'intelligence! Que sa bénédiction repose sur notre seigneur Mohammed le prophète, sur sa famille et sur ses pieux et saints compagnons! Écrit et terminé
108 v°. par Sâliq. Dans un autre exemplaire, l'auteur a ajouté : « J'ai exclu de mon ouvrage actuel ce qui est étranger à son sujet. J'avais désiré y faire entrer quelque chose sur les particularités des figures, du cercle, et des testaments [*]; mais je ne l'ai pas fait, pour deux raisons : la première, c'est mon aversion pour la prolixité; la seconde, c'est que j'ai déjà composé sur chacune de ces questions un ouvrage volumineux contenant les éléments de chacune, leurs théories exactes, et la solution des problèmes les plus subtils, d'après leur vraie méthode. Je prie Dieu qu'il m'assiste dans l'accomplissement des devoirs de l'obéissance envers lui, et qu'il facilite à toutes ses créatures ce qui doit les délivrer de l'erreur. Je le supplie de répandre sa bénédiction sur Mohammed le prophète, son élu parmi ses créatures, et sur sa sainte famille. Fin de l'ouvrage, à savoir, du traité connu sous le nom d'Alfakhrî. Écrit par Sâliq le pauvre.

تمّ كتاب الفخرى المشتمل على اصول الجبر والمقابلة واصول المسائل ولواهب العقل الحمد بلا غاية ولا نهاية وصلواته على سيدنا محمد النبى وعلى آله وعِشْرته الطاهرين الابرار كتبه وتممه سالك وفى نسخة اخرى قال واخليت كتابى هذا مما لا يجانسه واردت ان الحق به شيئًا من نوادر الاشكال والدور والوصايا فلم افعل لامرين احدهما التجنب من التطويل والثانى انى الفت فى كل واحد منها كتابا طويلا جامعا لاصوله وحقائقها واستخراج دقائق المسائل بمذهبها فيه وسألت الله تعالى ان يوفقنى لاداء موجبات طاعته وان ييسّر لجماعة خلقه ما ينقذهم من الضلال ورغبت اليه فى ان يصلى على النبى محمد صفوته من بريته وعلى آله الطاهرين تم الكتاب وهو المعروف بالفخرى كتبه سالك الحقير

[*] Comparer l'Algèbre de Mohammed Ben Moûçà, éd. de Rosen, p. 70 et suiv. et p. 86 et suiv. de la traduction anglaise.

ADDITIONS ET NOTES.

I.

PROBLÈME III, 5 D'ALKARKHÎ.

Si le premier de quatre hommes reçoit du second un dirhem, il aura le double de ce qui reste au second; et si le second reçoit du troisième deux dirhems, il aura le triple de ce qui reste au troisième; et si le troisième reçoit du quatrième trois dirhems, il aura quatre fois autant que ce qui reste au quatrième; enfin, si le quatrième reçoit du premier quatre dirhems, il aura cinq fois autant que ce qui reste au premier. Combien à chacun d'eux?

Posez la quantité du premier *chose*, et la quantité du second *mesure;* retranchez de la quantité du second un dirhem, et ajoutez-le à la quantité du premier; alors le premier possède *chose* plus un dirhem, et cela est égal à deux fois *mesure* moins un dirhem; prenez la moitié, il résulte [la moitié de] *chose* plus la moitié d'un dirhem égal à *mesure* moins un dirhem; donc vous trouvez la *mesure* égale à la moitié de *chose* plus un dirhem et demi. Et cela est la quantité du second.

Maintenant posez la quantité du troisième *mesure;* retranchez-en deux dirhems, que vous ajouterez à la quantité du second; celui-ci aura, en conséquence, la moitié de *chose* plus trois dirhems et demi, ce qui est égal à trois fois *mesure* moins deux dirhems, ou égal à trois *mesures* moins six dirhems. Ajoutez six dirhems à trois *mesures* et à ce qui leur est égal, on aura la moitié de *chose* plus neuf dirhems et demi égal à trois *mesures*.

فان قيل اربعة رجال اذا اخذ الاول من الثانى درهما كان معه مثلا الباقى مع الثانى فان اخذ الثانى من الثالث درهمين كان معه ثلاثة امثال الباقى مع الثالث وان اخذ الثالث من الرابع ثلاثة دراهم كان معه اربعة امثال الباقى مع الرابع وان اخذ الرابع من الاول اربعة دراهم كان معه خمسة امثال الباقى مع الاول كم مع كل واحد منهم فاجعل مال الاول شيئا ومال الثانى قسطا وخذ من مال الثانى درهما زده على مال الاول فيصير مال الاول شيئا ودرهما وذلك يعدل مثلى قسط الا درهما نصفه يكن [نصف] شىء ونصف درهم يعدل قسطا الا درهما فتجد القسط يعدل نصف شىء ودرهما ونصفا فهذا مال الثانى فاجعل مال الثالث قسطا وخذ منه درهمين وزده على مال الثانى فيصير معه نصف شىء وثلاثة دراهم ونصف وذلك يعدل ثلاثة امثال قسط الا درهمين وهو ثلاثة اقساط الا ستة دراهم فزد ستة دراهم على ثلاثة اقساط وعلى ما يعادله يصر نصف شىء

Conséquemment une *mesure* est égale à un sixième de *chose* plus trois dirhems et un sixième. Ceci est donc la quantité du troisième.

Ensuite posez la quantité du quatrième *mesure;* retranchez-en trois dirhems, et ajoutez-les au sixième de *chose* plus trois dirhems et un sixième. Il résulte un sixième de *chose* plus six dirhems et un sixième, ce qui est égal à quatre *mesures* moins douze dirhems. Donc, après avoir « restitué », on a quatre *mesures* égales à un sixième de *chose* plus dix-huit dirhems et un sixième. Conséquemment une *mesure* est égale à un tiers d'un huitième de *chose* et quatre dirhems et demi plus un tiers d'un huitième.

Ensuite prenez au premier quatre dirhems. Il lui restera *chose* moins quatre dirhems. Ajoutez-les à un tiers d'un huitième de *chose* plus quatre dirhems et demi et plus un tiers d'un huitième. Il résultera un tiers d'un huitième de *chose* plus huit dirhems et demi et plus un tiers d'un huitième, ce qui est égal à cinq *choses* moins vingt dirhems. Donc, lorsqu'on aura restitué et enlevé ce qu'il faut enlever, il reste quatre *choses* plus vingt-trois parties de vingt-quatre parties de *chose* égal à vingt-huit dirhems plus treize parties de vingt-quatre parties. Conséquemment six cent quatre-vingt-cinq parties de cent dix-neuf parties de l'unité sera la quantité du premier.

Et parce que nous avons posé la quantité du second égale à la moitié de *chose* plus un dirhem et demi, elle sera cinq cent vingt et une parties de cent dix-neuf parties de l'unité.

Et parce que nous avons posé la quantité du troisième égale à un sixième

وتسعة دراهم ونصفا يعدل ثلاثة اقساط فالقسط الواحد يعدل سدس شىء وثلاثة
دراهم وسدسا فهذا مال الثالث فاجعل مال الرابع قسطا وخذ منه ثلاثة دراهم
وزده على السدس شىء وثلاثة دراهم وسدس فيصير سدس شىء وستة دراهم وسدسا
وذلك يعادل اربعة اقساط الّا اثنى عشر درهما فاذا جبرت كان اربعة اقساط يعدل
سدس شىء وثمانية عشر درهما وسدسا فالقسط الواحد يعدل ثلث ثمن شىء واربعة
دراهم ونصفا وثلث ثمن فخذ من الاول اربعة دراهم يبق معه شىء الا اربعة دراهم زدها
على ثلث ثمن شىء واربعة دراهم ونصف وثلث ثمن فيصير ثلث ثمن شىء وثمانية دراهم
ونصفا وثلث ثمن يعدل خمسة اشياء الا عشرين درهما فاذا جبرت والقيت ما يجب
القاوه بقى اربعة اشياء وثلاثة وعشرون جزءا من اربعة وعشرين جزءا من شىء
يعدل ثمانية وعشرين درهما وثلاثة عشر جزءا من اربعة وعشرين جزءا فيكون
ستماية وخمسة وثمانين جزءا من ماية وتسعة عشر جزءا من واحد فهذا هو مال
الاول ولاجل انا جعلنا مال الثانى نصف شىء ودرهما ونصفا يكون خمسماية واحدا
وعشرين جزءا من ماية وتسعة عشر جزءا من واحد ولاجل انا جعلنا مال الثالث

de *chose* plus trois dirhems et un sixième, il aura quatre cent quatre-vingt-onze parties de cent dix-neuf parties de l'unité.

Et parce que nous avons posé la quantité du quatrième égale à un tiers d'un huitième de *chose* plus quatre dirhems et demi et plus un tiers d'un huitième, il aura cinq cent soixante-neuf parties de cent dix-neuf parties de l'unité.

PROBLÈME III, 6 D'ALKARKHÎ.

Une certaine quantité (doit être divisée) parmi trois personnes. A la première personne revient la moitié, à la seconde un tiers, et à la troisième un sixième. Elles se partagent d'abord (le tout d'une certaine manière). Ensuite celle qui devait recevoir la moitié, rend la moitié de ce qu'elle avait pris; celle qui devait recevoir le tiers, rend le tiers de ce qu'elle avait pris; et celle qui devait recevoir le sixième, rend le sixième de ce qu'elle avait pris; elles divisent parmi elles la masse rendue en trois parties égales, après quoi chacune d'elles a juste la partie qui lui était due. (Combien chacune avait-elle pris d'abord?)

Posons la masse entière une *chose* plus une *partie* plus un dirhem, en sorte que le possesseur de la moitié prend *chose*, le possesseur du tiers *partie*, et le possesseur du sixième un dirhem. La masse rendue sera alors : une moitié de *chose* plus un tiers de *partie* plus un sixième d'un dirhem. Ils divisent cela parmi eux en trois parties égales. Le possesseur de la moitié recevra en conséquence un sixième de *chose* plus un neuvième de *partie* plus la moitié d'un neuvième d'un dirhem. S'il ajoute cela à ce qu'il a déjà, il aura deux

سدس شيء وثلاثة دراهم وسدسا يكون له اربع مایة واحد وتسعون جزءا من مایة وتسعة عشر جزءا من واحد ولاجل انا جعلنا مال الرابع ثلث ثمن شيء واربعة دراهم ونصفا وثلث ثمن يكون له خمسماية وتسعة وستون جزءا من ماية وتسعة عشر جزءا من واحد

فان قيل مال بين ثلاثة انفس للاول النصف وللثاني الثلث وللثالث السدس انتهبوه فرد صاحب النصف نصف ما انتهب وصاحب الثلث ثلث ما انتهب وصاحب السدس سدس ما انتهب وقسموا ما ردوا بينهم اثلاثا فاصاب كل واحد منهم نصيبه فاجعل المال كله شيئًا وقسما ودرهما فانتهب صاحب النصف شيئًا وصاحب الثلث قسما وصاحب السدس درهما فصار المردود نصف شيء وثلث قسم وسدس درهم وقسموا ذلك بينهم اثلاثا فاصاب صاحب النصف سدس شيء وتسع قسم ونصف تسع درهم فاذا اضافه الى ما معه صار معه ثلثا شيء وتسع قسم ونصف تسع درهم

tiers de *chose* plus un neuvième de *partie* plus la moitié d'un neuvième d'un dirhem. Mais il lui revient la moitié de *chose* plus la moitié de *partie* plus la moitié d'un dirhem; cela est donc égal à ce qu'il a. Supprimons les quantités égales du même genre; il reste un sixième de *chose* moins quatre neuvièmes d'un dirhem égal à trois neuvièmes et la moitié d'un neuvième de *partie*. Conséquemment, une *partie* est égale à trois septièmes de *chose* moins huit septièmes d'un dirhem. C'est ce qu'a pris le second.

Donc le premier a pris *chose*, le second trois septièmes de *chose* moins huit septièmes d'un dirhem, et le troisième un dirhem. Mais nous savons que si le premier rend la moitié, le second un tiers, et le troisième un sixième de ce qu'ils ont pris, et qu'ils divisent cela ensuite parmi eux, il retourne au premier un tiers de ce qu'il a rendu, plus un tiers de ce qu'a rendu le second, ce qui est un neuvième de ce que le second a pris, et plus un tiers de ce qu'a rendu le troisième, ce qui est la moitié d'un neuvième de ce que le troisième a pris. De même, il retourne au second un tiers [de ce qu'il a rendu, ce qui est un neuvième] de ce qu'il a pris, plus un tiers de ce qu'a rendu le premier, ce qui est un sixième de ce que le premier a pris, et plus un tiers de ce qu'a rendu le troisième, ce qui est la moitié d'un neuvième de ce que le troisième a pris. Enfin, il retourne au troisième [un tiers de ce qu'il a rendu, ce qui est la moitié d'un neuvième de ce qu'il a pris, plus] un tiers de ce qu'a rendu le premier, ce qui est un sixième de ce que le premier a pris, et plus un tiers de ce qu'a rendu le second, ce qui est un neuvième de ce que le second a pris.

Donc, si vous prenez le dirhem et que vous en retranchiez un neuvième,

وله نصف شيء ونصف قسم ونصف درهم وذلك يعدل ما معه فالق الاشياء المتساوية المتجانسة يبق سدس شيء الا اربعة اتساع درهم يعدل ثلاثة اتساع ونصف تسع قسم فالقسم الواحد يعدل ثلاثة اسباع شيء الا ثمانية اسباع درهم فهذا ما انتهبه الثانى فصارما انتهبه الاول شيئًا وما انتهبه الثانى ثلاثة اسباع شيء الا ثمانية اسباع درهم وما انتهبه الثالث درهمًا وقد علمنا ان الاول اذا رد نصف ما انتهب والثانى ثلث ما انتهب والثالث سدس ما انتهب ثم قسموه يعود الى الاول ثلث ما رد وثلث ما رده الثانى وهو تسع ما انتهب وثلث ما رده الثالث وهو نصف تسع ما انتهب ويصير الى الثانى ثلث ما انتهب وثلث ما رده الاول وهو سدس ما انتهب وثلث ما رده الثالث وهو نصف تسع ما انتهب ويصير الى الثالث ثلث ما رده الاول وهو سدس ما انتهب وثلث ما رده الثانى وهو تسع ما انتهبه فاذا اخذت الدرهم والقيت تسعه بقى معه ثمانية اتساع درهم زد عليه سدس شيء وتسع ما

il reste au troisième huit neuvièmes d'un dirhem. Ajoutez-y un sixième de *chose* et un neuvième de ce qu'a pris le second, ce qui est trois parties de soixante-trois parties de *chose* moins huit parties de soixante-trois [parties] d'un dirhem. Il résulte neuf parties de quarante-deux parties de *chose* plus trente-deux parties de quarante-deux parties d'un dirhem, ce qui est égal à un sixième de ce que tous ensemble ont pris; à savoir, dix parties de quarante-deux parties de *chose* moins une partie de quarante-deux parties d'un dirhem. Conséquemment, si vous « restituez et opposez l'un à l'autre », il reste une partie de quarante-deux parties de *chose* égale à trente-trois parties de quarante-deux parties d'un dirhem. Donc une *chose* est égale à trente-trois; et c'est ce qu'a pris le premier.

Et ce qu'a pris le second, c'est treize; parce que cela a été posé égal à trois septièmes de *chose* moins huit septièmes d'un dirhem.

Enfin ce qu'a pris le troisième, c'est un dirhem. — Remarquez cela.

انتهبه الثانى وهو ثلاثة اجزاء من ثلاثة وستين جزءا من شىء الا ثمانية اجزاء من ثلاثة وستين من درهم يصر تسعة اجزاء من اثنين واربعين جزءا من شىء واثنين وثلاثين جزءا من اثنين واربعين جزءا من درهم يعدل سدس ما انتهبه الجميع وهو عشرة اجزاء من اثنين واربعين جزءا من شىء الا جزءا من اثنين واربعين جزءا من درهم فاذا جبرت وقابلت بقى جزء من اثنين واربعين جزءا من شىء يعدل ثلاثة وثلاثين جزءا من اثنين واربعين جزءا من درهم فالشىء الواحد يعدل ثلاثة وثلاثين فهذا ما انتهبه الاول وما انتهبه الثانى ثلاثة عشر لانه جعل ثلاثة اسباع شىء الا ثمانية اسباع درهم والذى انتهبه الثالث درهم فافهم ذلك

II.

La Bibliothèque impériale possède deux manuscrits de la *Pratique de la Géométrie*, ouvrage composé par Fibonacci en 1220. Ce sont les manuscrits latins, ancien fonds, n° 7223, et supplément latin, n° 78. On trouve dans ce dernier manuscrit (p. 337 et suiv.) la discussion des deux problèmes indéterminés $x^2 \pm a = y^2$, et ce passage m'a semblé d'autant plus digne d'attention, que les constantes choisies par Fibonacci sont exactement celles des problèmes II, 22 et 23 du recueil d'Alkarkhî.

Fibonacci résout d'abord le problème $x^2 + 5 = y^2$ d'une manière entière-

ment conforme à la théorie et à la pratique d'Alkarkhî, en posant y égal à $x+n$, où $n<\sqrt{5}$. Puis il explique le problème par une figure géométrique. Je fais observer à ce sujet que c'est simplement une illustration et non pas une construction géométrique du problème. Enfin, il résout le problème d'une manière qui paraît lui être particulière, en employant la théorie de la génération des nombres carrés par la sommation de la suite des nombres impairs. C'est que pour résoudre $x^2+n=y^2$, n étant un nombre impair, il prend la somme $1+3+5+\ldots\ldots+(n-2)=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, ce qui lui donne $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Ou bien, en multipliant l'équation proposée par un carré impair m^2, il résout par la même méthode $x_1^2+m^2n=y_1^2$, et a ensuite $x=\frac{x_1}{m}$, $y=\frac{y_1}{m}$. Mais si l'on multiplie l'équation proposée par un carré pair, de sorte que m^2n est divisible par 2^p, on prendra la somme des nombres impairs depuis 1 jusqu'à $\frac{m^2n}{2^p}-(2^p+1)$ * ce qui donne $\left(\frac{\frac{m^2n}{2^p}-2^p}{2}\right)^2$, et en prenant cette valeur pour x_1^2, on aura

$$y_1^2=\left(\frac{\frac{m^2n}{2^p}+2^p}{2}\right)^2,\quad x=\frac{\frac{m^2n}{2^p}-2^p}{2m},\quad y=\frac{\frac{m^2n}{2^p}+2^p}{2m}.$$

Fibonacci donne ces derniers procédés sans démonstration. Enfin, il ramène le problème $x^2-10=y^2$ au problème précédent, en remarquant que si $x^2-n=y^2$, on a $y^2+n=x^2$.

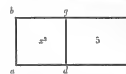
Je fais suivre ici le passage du manuscrit latin que je viens d'analyser, ainsi que le texte et la traduction des problèmes II, 22, 23 d'Alkarkhî. J'ai donné dans des notes la leçon originale où j'ai fait des corrections au texte latin, et j'ai placé entre parenthèses les restitutions que j'ai cru devoir faire en plusieurs endroits.

Expliciunt quæstiones geometricales et incipiunt quæstiones quarum solutiones non sunt terminatæ, hoc est quod non cadunt ad unum terminum tantum, sed ad plures.

« Ut est ista in qua proponitur inveniri aliquis quadratus numerus, cui si « addatur 5, proveniat inde quadratus numerus, et hoc potest fieri multipli- « citer. Pone pro radice majoris numeri rem et aliquot dragmas, quæ cum

* Il faut observer qu'en supposant $m=i\,2^q$, où i représente un nombre impair, on doit choisir $p=2q$, donc tout au plus $p=2q-1$, parce que autrement $\frac{m^2n}{2^p}-(2^p+1)$ cesserait d'être un nombre entier et impair.

« in se multiplicatæ fuerint, faciunt minorem numerum quam 5; et sit dragma, « et multiplicetur res et dragma in se, veniet census et 2 res et dragma una, « quæ æquantur censui et 5 dragmis; abjice ab utraque parte censum et « dragmam, remanebunt 2 res æquales 4 dragmis, ergo res est 2 dragma- « rum, et quadratum ejus est 4, quæsitus numerus, cui si addatur 5, veniet « 9, qui numerus quadratus est, et radix ejus est 3; et si ponamus cum re « dragmas 2, multiplicemus ea in se, exibit census et 4 res et 4 dragmæ, « æquales censui et 5 dragmis; projiciamus ab utraque parte censum et 4, « remanebunt 4 res æquales uni dragmæ, quare res est $\frac{1}{4}$ dragmæ, quæ in « se multiplicata facit $\frac{1}{16}$ unius dragmæ pro quæsito numero, cui si addatur 5, « venient $5\frac{1}{16}$, qui numerus quadratus est, et radix ejus est $2\frac{1}{4}$.



« Aliter pone pro ipso quadrato numero qua- « dratum *ag* *, et addatur ei superficies *de*, quæ sit « 5, et jaceat linea *ge* in directo lineæ *bg*, et erit « numerus superficialis numerus *ae*, et provenit ex « *ab* in *be*, et proponitur numerus *ae* esse quadra- « tus, quare numeri *ab* et *be* similes superficiales sunt, hoc est quod propor- « tio numeri *eb* ad numerum *ab* est sicut quadratus numerus ad quadratum « numerum **. Unde possimus infinitos duos numeros invenire habentes « inter se proportionem sicut quadratus numerus ad quadratum numerum « cum quibus poterimus ad propositum devenire; quare ponamus propor- « tionem numeri *eb* ad numerum *ba*, hoc est ad numerum *gb*, esse sicut « [9 ad] 4, quare proportio *eg* ad *gb* erit sicut 5 ad 4; et est proportio su- « perficiei *de* ad quadratum *db* sicut *eg* recta ad rectam *gb*, ergo superficies « *de* ad quadratum *db* est sicut 5 ad 4; unde si superficies *de* est 5, et qua- « dratum *db* est 4; ergo quæsitus quadratus numerus est 4, cui si addatur 5, « venient 9, qui etiam quadratus est; et nota quod proportio superficiei *de*, « quæ est 5, ad quadratum *db* oportet esse sicut aliquis numerus *** cujus « quinta pars sit quadratus, ad alium quemlibet **** quadratum numerum. « Verbi gratia sit proportio *eb* ad *bg* sicut 81, quæ est quadrata, est ad 1, erit « ergo proportio *de*, quæ est 5, ad *db* sicut 80 ad 1, de quibus 80 [5 est] « sexta decima pars, unde quadratum *db* est $\frac{1}{16}$ de 1, cujus radix est $\frac{1}{4}$, « quod habetur pro latere *gb*, et sic tota superficies *ae* erit $5\frac{1}{16}$, cujus radix « est $2\frac{1}{4}$, ut superius inventum est.

* La figure manque dans le manuscrit. — ** Comparer Euclide, *Éléments*, IX, 2 et VIII, 26. — *** Le ms. porte : « aliquis quadratus numerus. » — **** Je propose de lire « quendam. »

« Aliter, quia omnes quadrati numeri ordinate proveniunt ex aggregatione « imparium numerorum ab unitate ascendentium per ordinem, si colligamus « impares numeros qui sunt infra 5, sive 1 et 3, procreabuntur inde 4, qui « numerus quadratus est, cui si addantur 5, venient 9, qui est quadratus « numerus; et si multiplicaverimus aliquem imparem quadratum numerum, « ut dicamus 9, per 5, venient 45, et acceperimus quadratum qui provenit « ex aggregatione omnium numerorum imparium qui sunt ab uno usque « in 43, hoc est qui sunt infra 45, qui quadratus numerus est 484, et ejus « radix est 22, et super ipsum quadratum addiderimus 45, nimirum in qua- « dratum numerum 529 veniemus, et quia ita est, si diviserimus utrumque « quadratum numerum per ipsum quadratum numerum, per quem multi- « plicaverimus 5, nimirum duo quadrati numeri ex ipsa divisione provene- « rint, quorum unus excedit alterum in 5, ut quæsitum est, et erit unus « ipsorum quadratorum $53\frac{7}{9}$ et alter $58\frac{7}{9}$; et si vis habere radices eorum « divide [per] radicem de 9, venient $7\frac{1}{3}$. Similiter si multiplicaverimus 5 « per aliquem quadratum parem [ac diviserimus productum ex multiplica- « tione] in duas, vel in quatuor, vel in plures partes impares, itaque una- « quæque pars sit impar, et jaceant ipsæ partes impares in ordine imparium « numerorum, poterimus ad solutionem suprascriptæ quæstionis devenire. « Verbi gratia multiplicemus 5 per 16, venient 80, et dividamus 80 in duos « [im]pares numeros qui sint continui in ordine imparium numerorum, « eruntque 39 et 41; deinde aggregamus omnes impares numeros ab unitate « qui sunt infra 39, quam aggregationem habebis, si multiplicaverimus in « se medietatem duorum extremorum, sive de 1 et 37, de qua multiplica- « tione exibit 361, cum quibus si addiderimus 80, venient 441; si diviseri- « mus hos duos quadratos per 16, habebimus $22\frac{9}{16}$ et $27\frac{9}{16}$, et radices « eorum habebimus, si per radicem de 16, quæ est 4, diviserimus 19 et 21. « qui sunt radices de 361 et de 441; et si de 80 fecerimus quatuor partes « impares, quæ sunt 17 et 19 et 21 et 23, quæ quatuor partes sunt circa « quartam de 80, quæ est 20, et aggregabimus numeros impares, qui sunt « infra 17, veniunt 64, qui est quadratus numerus, cujus radix est 8, super « quem si addiderimus 80, venient 144, unde si diviserimus 144 et 64 « per 16, et radices eorum per 4, habebimus optatum ut supra.

« Et si dicemus : de quodam quadrato numero abstuli 10, et * remansit « quadratus numerus, hæc quæstio similis est antecedenti, quia si super

* Le ms. porte : « abstulit et. »

« minorem quadratum addantur 10, provenit inde quadratus numerus; ope-« rare ergo in eam secundum quod superius operati fuimus et inveniemus*. »

PROBLÈME II, 22 D'ALKARKHÎ.

فان قيل مال له جذر ان زدت عليه خمسة دراهم كان له جذر فاجعل المال مالا وزد عليه خمسة دراهم فيصير مالا وخمسة دراهم خذ جذره بالاستقرآء وهو ان تجعله شيئًا ودرهما فيصير مالا وشيّين ودرهما معادلا لمال وخمسة دراهم فالشىء يعدل درهمين والمال اربعة دراهم

Si à une certaine quantité qui a une racine, on ajoute cinq dirhems, la somme a une racine. Posez cette quantité *carré*, et ajoutez-y cinq dirhems; il résulte un carré plus cinq dirhems; prenez-en la racine au moyen de l'istikrâ, ce qui consiste à la poser égale à une chose plus un dirhem; on aura un carré plus deux choses plus un dirhem égal à un carré plus cinq dirhems. Donc la chose est égale à deux dirhems, et le carré est égal à quatre dirhems.

PROBLÈME II, 23 D'ALKARKHÎ.

فان قيل مال له جذر ان نقصت منه عشرة دراهم كان للباق جذر فاجعل المال اى شىء مجذور اردت فاجعله مالا وانقص منه عشرة دراهم يبق مال الا عشرة دراهم اجعل جذره شيئًا الا درهما يصر مالا ودرهما الا شيين معادلا لمال الا عشرة دراهم فيصير بعد الجبر احد عشر درهما تعدل شيين والشىء يعدل خمسة دراهم ونصفا فالمال ثلاثون وربع وهو المطلوب

Si d'une certaine quantité qui a une racine, on retranche dix dirhems, le reste a une racine. Posez pour cette quantité une chose quelconque dont on peut extraire la racine, disons carré; retranchez-en dix dirhems; il reste un carré moins dix dirhems. Posez la racine de cette expression égale à chose moins un dirhem. Il résulte un carré plus un dirhem moins deux choses égal à un carré moins dix dirhems. Donc, après avoir exécuté l'opération du djabr, on aura onze dirhems égaux à deux choses, et la chose égale à cinq dirhems et demi; conséquemment le carré égal à trente et un quart, et c'est ce qu'on avait cherché.

* Il vaudrait peut-être mieux lire « invenimus. »

J'ai dit, au commencement de cette addition (voir aussi ci-dessus, p. 30), que l'emploi de la théorie de la génération des nombres carrés par la sommation de la suite des nombres impairs pour la résolution de certains problèmes indéterminés du second degré, semble être une découverte de Fibonacci. En effet, jusqu'à présent je n'ai encore rencontré cet emploi nulle part chez les Arabes. Au contraire, je fais observer que cette génération des nombres carrés elle-même était parfaitement connue aux Arabes. C'est ce qui résulte du passage suivant que j'extrais du manuscrit arabe, ancien fonds, n° 1105 (page 16), manuscrit de l'ouvrage encyclopédique intitulé : *Traités des Ikhwân Alçafâ* :

ومن خاصية نظم الافراد انه اذا جمع على نظمه الطبيعي يكون المجموعات واحد
زوجا والاخر فردا وتكون كلها مجذورات يتلو بعضها بعضا

« Il est encore du caractère de la suite des nombres impairs, que s'ils sont additionnés suivant leur ordre naturel, les sommes sont alternativement paires et impaires, et que toutes ces sommes sont des carrés se succédant l'un à l'autre. »

C'est sans doute dans l'arithmétique de Nicomaque que les Arabes avaient puisé la connaissance de cette propriété des nombres impairs.

NOTES.

Pag. 3, lig. 15 et suiv. — Pour obtenir une donnée sur l'âge probable de la partie ancienne du manuscrit (96 feuillets sur 108), j'ai consulté M. Reinaud, que son immense expérience en fait de manuscrits orientaux rend plus que personne juge compétent en cette matière. Selon l'avis de l'illustre professeur, le manuscrit appartient, d'après son papier et son écriture, à une époque comprise entre les années 400 et 600 de l'hégire, ou 1000 et 1200 environ de notre ère.

Pag. 4, lig. 11. — En disant « le premier », j'entendais parler d'ouvrages originaux, composés par des auteurs occidentaux; car je n'ignorais pas que la connaissance de l'algèbre fut introduite en Europe déjà antérieurement à Fibonacci, par des traductions de traités arabes faites au XIIe siècle. Mais il résulte des savantes recherches que M. Chasles a réunies dans un mémoire sur l'époque où l'algèbre a été introduite en Europe (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, tom. XIII, pag. 497 et suiv.), que parmi les travaux algébriques de ces traducteurs, il se trouve des ouvrages originaux, aussi originaux du moins que ceux de Fibonacci. Il faut donc rectifier dans ce sens la phrase ci-dessus, que j'avais écrite sous l'impression d'une opinion reproduite pendant longtemps par les ouvrages les plus estimés relatifs à l'histoire de l'algèbre, mais réfutée désormais par le mémoire de l'illustre géomètre que je viens de citer.

Pag. 14, problème n° 8. — J'ai classé sous cette forme le problème 35 de la IVe section (p. 113), et lorsqu'on écrit son énoncé comme il suit : $y^2 + 5 = x^2$, $y^2 + y = z^2$, ce problème est en effet de cette forme et parfaitement analogue au problème précédent (34). Cependant, tel qu'il est traité par Alkarkhi, il contient en germe la résolution (en nombres rationnels) d'une autre espèce d'égalité double, qu'il ne sera peut-être pas superflu de faire remarquer, et dont voici l'exposé :

$$a^2x^2 + bx + c = y^2, \quad a_1^2y^2 + b_1y + c_1 = z^2;$$

en posant
$$z = \pm mx \pm n,$$

on aura
$$a_1^2(a^2x^2 + bx + c) + b_1\sqrt{a^2x^2 + bx + c} + c_1 = m^2x^2 \pm 2mnx + n^2;$$

donc
$$\sqrt{a^2b_1^2x^2 + bb_1^2x + cb_1^2} = (m^2 - a^2a_1^2)x^2 + (\pm 2mn - ba_1^2)x + (n^2 - ca_1^2 - c_1);$$

et si l'on prend
$$m = aa_1,$$

$$a^2b_1^2x^2 + bb_1^2x + cb_1^2 = (\pm 2aa_1n - ba_1^2)^2x^2 + 2(\pm 2aa_1n - ba_1^2)(n^2 - ca_1^2 - c_1)x + (n^2 - ca_1^2 - c_1)^2;$$

donc, si l'on prend
$$n = \frac{\pm ab_1 + ba_1^2}{\pm 2aa_1} = \pm \frac{b_1}{2a_1} \pm \frac{ba_1}{2a},$$

$$x = \frac{cb_1^2 - (n^2 - ca_1^2 - c_1)^2}{2(\pm 2aa_1n - ba_1^2)(n^2 - ca_1^2 - c_1) - bb_1^2},$$

$$y = \frac{1}{b_1}(\pm 2aa_1n - ba_1^2)x + \frac{1}{b_1}(n^2 - ca_1^2 - c_1),$$

où, en place de n, il faut substituer sa valeur en a, a_1, b, b_1 qu'on vient de déterminer.

Pag. 21, lig. 17. — L'ordre adopté par Alkarkhi est plus naturel que celui du texte de Diophante que nous possédons actuellement, et je suis très-porté à croire que c'est celui que présentait la rédaction originale de Diophante.

Pag. 24, dernier alinéa. — Mes traductions en formules algébriques pourraient quelquefois paraître inexactes, lorsqu'on voudrait les comparer superficiellement avec les énoncés de Fibonacci, tels qu'ils se trouvent dans le morceau publié par M. Libri. C'est que souvent ceux-ci sont fautifs, confondant, par exemple, *numerus major* avec *numerus minor*, lorsqu'il s'agit de distinguer deux inconnues, donnant des chiffres faux, etc. de sorte qu'on n'est jamais bien sûr de l'exactitude de ces énoncés, à moins d'avoir suivi le problème, en en refaisant le calcul, jusqu'à la fin. C'est ce que j'ai toujours fait, et je crois devoir en prévenir ceux de mes lecteurs qui voudront vérifier mes formules sur le texte publié par M. Libri.

Pag. 26, lig. 8. — Comme cette observation touche à un des points les plus délicats de l'histoire de l'algèbre, je dois ajouter que la notation linéaire de Fibonacci, tout en *approchant*, en quelques cas isolés, d'une véritable notation algébrique, est loin cependant de l'être réellement, et loin surtout d'en présenter la généralité et l'uniformité. Je renvoie d'ailleurs à la dissertation profonde et détaillée que M. Chasles a consacrée à l'éclaircissement de cette importante question. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, tom. XII, pag. 741 et suiv.)

Pag. 34 et suiv. — Au sujet de mon exposé des méthodes indiennes, je dois faire une remarque semblable à celle qu'on trouve dans une note précédente sur ma traduction algébrique des énoncés de Fibonacci. C'est que je prie ceux de mes lecteurs qui compareraient mes formules avec la tra-

duction de Colebrooke, de ne pas se laisser tromper par une différence, quelquefois considérable, qu'au premier aspect mes formules pourraient leur sembler présenter avec les énoncés indiens. Bien que la traduction de Colebrooke soit excellente, ou plutôt parce qu'elle l'est, ces énoncés sont d'une obscurité extrême, ce qui n'a rien d'étonnant lorsqu'on se rappelle que les ouvrages scientifiques des brahmanes étaient écrits pour ne pas être compris par les profanes, et que toutes les explications étaient réservées à un enseignement ésotérique. M. Chasles, qui a rétabli, par une brillante divination, le véritable sens de la géométrie de Brahmegupta, et dont l'autorité, en cette matière, doit certes être d'un grand poids, s'exprime ainsi à ce sujet (*Aperçu historique*, etc. pag. 419) : « Tel est l'objet de l'onvrage de Brahmegupta, si nous ne nous abusons dans notre interprétation de la plupart de ses propositions, dont le sens doit être deviné, à cause de la concision extrême des énoncés, où manque la plus grande partie des conditions qui devraient y eotrer. » Pour les règles algébriques en particulier, il n'est guère possible d'en saisir la signification exacte qu'eu faisant le calcul de tous les exemples qui s'y rapportent, et c'est cette méthode que j'ai suivie pour me rendre compte du vrai sens des théories indiennes. Qu'on me permette ici l'assurance que les formules, telles que je les ai donoées, sont le résultat de l'examen le plus consciencieux et le plus réfléchi. Je me suis efforcé aussi de rétablir la liaison qui existe entre différentes règles d'un même chapitre, mais qui est complétement supprimée dans les ouvrages iodiens. Ainsi, j'ai fait voir comment la première section du troisième chapitre du Vija-Ganita a pour but exclusif de résoudre l'équation $cx^2 + 1 = y^2$, qu'elle y conduit réellement par deux méthodes différentes, et que le théorème retrouvé par Euler, qu'on pourrait être tenté de considérer comme le véritable objet de cette section, parce qu'il en est la partie la plus remarquable, n'est, en cet endroit, qu'un théorème auxiliaire sur lequel Bhascara fonde son procédé pour résoudre l'équation $cx^2 + 1 = y^2$. De même j'ai tâché de faire ressortir le point de vue commun sous lequel les règles du VIIe chapitre se groupeot comme parties intégrantes d'un seul problème général. Pour faciliter à ceux de mes lecteurs qui voudraient entreprendre ce travail, l'identification de mes formules avec la traduction de Colebrooke, je fais suivre ici la spécification, pour toutes mes formules, des paragraphes d'où elles sont tirées.

Liloroti, IIIe chap. 4e sect. Première et seconde solution, § 59-60; troisième solution, § 61.

Vijo-Gonito, IIIe chap. 1re sect. § 75-81. Énoncé $cx^2 + 1 = y^2$, § 75. — 1re méthode : $cx^2 + a = y^2$, $cx_1^2 + a_1 = y_1^2$, § 76. — $c(xy_1 \pm yx_1)^2 + aa_1 = (cxx_1 \pm yy_1)^2$, §§ 77, 78. — $c\left(\frac{2xy}{z}\right)^2 + 1 = \left(\frac{cx + y^2}{z}\right)^2$, § 79. — 2e méthode, § 80-81.

2e sect. § 83-86.

3e sect. $cx^2 - 1 = y^2$, § 88-89. — $c^2x^2 + a = y^2$, § 95.

VIIe chap. (1) § 175-176. — (2) § 179-180. — (3) § 183. — (4) § 174, pag 246, second alinéa. — (5) § 186, pag. 252. — (6) § 186. — (7) § 186. — (8) § 186. — (9) § 195-196. — (1) $x^2 - a = by$, § 203 205. — (2) $x^2 - a = by$, *ibid.* pag. 264.

VIIIe chap. 1re méthode, § 208. — 2e méthode, § 212-214.

Brahmegupta (1) $cx^2 + 4 = y^2$, etc. § 69. — $cx^2 - 4 = y^2$, etc. § 71. — (2) § 78. — (3) § 80. — (4) § 82. — (5) § 84.

Pag. 46, lig. 7 du texte arabe. J'ai adopté la leçon الجذب (ce que j'ai traduit par « la violence »), parce qu'il y avait en quelque sorte une double preuve que le texte portait ذ avec un poiot. C'est que l'écriture de cette page du manuscrit ayant été très-effacée, on l'a rajeunie, et le point du ذ se trouve aussi bien daos les traits renouvelés que dans ce qui reparait eo-dessous de l'ancienne écriture. Sans cette circonstance particulière, j'aurais lu جدب « disette », surtout à cause du coo-traste avec خصب « abondance », qu'on lit dans ce qui suit.

Pag. 48 et suiv. — Dans mon *Extrait du Fakhri*, tout appartient à l'auteur arabe, à l'exception seulement de quelques remarques précédées du mot *Note*, et de quelques passages ou formules renfermées entre crochets. Les alinéas précédés du mot *Note* contiennent des observations sur certains termes techniques, et des rapprochements relatifs aux méthodes de l'auteur, que je croyais utiles, et trop essentiels ou en partie trop étendus, pour être confondus parmi les notes placées sous le texte au bas des pages. Les parties renfermées entre crochets sont destinées à suppléer à des lacunes du manuscrit, provenant évidemment de la négligence du copiste. Mais, à ces deux exceptions près, tout ce qui se trouve dans le texte de mon *Extrait* offre (abstraction faite de la traduction en langage algébrique), la reproduction exacte des théories de l'auteur arabe, en conservant même scrupuleusement la manière dont il les présente et les énonce. Entre autres, j'ai conservé dans ma transcription la manière dont l'auteur énonce les fractions, au moyen des valeurs réciproques des neuf unités, conformément à la coutume des algébristes arabes; ce qui lui fait dire tantôt «la moitié d'un huitième» pour «un seizième», tantôt «un demi et un quart» pour «trois quarts», etc. Mais à côté de cette méthode, on trouve aussi la manière plus naturelle d'énoncer la fraction simplement au moyen de son numérateur et de son dénominateur; elle est employée surtout pour les fractions ayant pour numérateur et dénominateur de grands nombres. Dans ces cas, l'expression arabe est, par exemple, pour $\frac{164}{308}$ «cent soixante-quatre parties de trois cent huit parties de l'unité» مأية واربعة وستون جزءا من ثلاثمأية وثمانية اجزاء من واحد.

Pag. 54, lig. 5 en remontant. — L'auteur ne donne pas d'exemple pour le cas de sept termes, mais on ne doit pas douter que les Arabes n'aient su traiter ce cas. Voici un exposé de cette méthode sous sa forme générale. Posant

$$(\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5 + \ldots)^2 = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5 + \ldots$$

on trouve, en multipliant $\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots$ en lui-même, que

$$\beta_0 = \alpha_0^2 \qquad \beta_4 = 2(\alpha_0\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3) + \alpha_2^2$$

$$\beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 \qquad \beta_5 = 2(\alpha_0\alpha_5 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)$$

$$\beta_2 = 2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 \qquad \beta_6 = 2(\alpha_0\alpha_6 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4) + \alpha_3^2$$

$$\beta_3 = 2(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) \qquad \beta_7 = 2(\alpha_0\alpha_7 + \alpha_1\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4)$$

et ainsi de suite, donc

$$\alpha_0 = \sqrt{\beta_0} \qquad \alpha_4 = \frac{\beta_4 - (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2)}{2\alpha_0}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2\alpha_0} \qquad \alpha_5 = \frac{\beta_5 - 2(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)}{2\alpha_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2 - \alpha_1^2}{2\alpha_0} \qquad \alpha_6 = \frac{\beta_6 - \{2(\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4) + \alpha_3^2\}}{2\alpha_0}$$

$$\alpha_3 = \frac{\beta_3 - 2\alpha_1\alpha_2}{2\alpha_0} \qquad \alpha_7 = \frac{\beta_7 - 2(\alpha_1\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4)}{2\alpha_0}$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire que chaque α s'exprime au moyen du β correspondant et des α précédents, et, en conséquence, au moyen des β seuls. Ces formules ayant α_0 au dénominateur deviendraient illusoires en cas de $\beta_0 = 0$, donc $\alpha = 0$. Mais le carré d'une fonction entière et rationnelle de α ne peut jamais être que de la forme

$$a^{2m}\{\gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \ldots\}.$$

Si $m = 0$, β_0 ne sera pas o, mais $= \gamma_0$, et c'est le cas que nous venons de considérer. Si m est

un nombre entier quelconque, on prendra séparément la racine de a^{2m} qui est a^m, et la racine de $\gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \ldots$ suivant la méthode ci-dessus.

Pag. 138, lig. 6 du texte arabe. — بمذهبها est une conjecture que je substitue au mot بمودعها qu'on lit dans le manuscrit, et qui ne présente aucun sens satisfaisant. Au contraire, مذهب est le terme spécial pour désigner une méthode de solution. Voir, par exemple, pag. 66, l. 7 en remontant.

Pag. 147, probl. II, 22, lig. 3 du texte arabe. — شيّين. Le manuscrit porte constamment et invariablement شيين, j'ai donc cru devoir tenir compte de cette leçon, et j'écris en conséquence شَيَّيْن. Mais la leçon شيئين adoptée par M. Rosen, dans son édition de Mohammed Ben Moûçâ, est préférable. (Voir la *Gramm. ar.* de M. de Sacy, deuxième édition, tom. I, § 231, note.)

CORRECTIONS.

Pag. 2, lig. 1, en remontant, 2ᵉ col. au lieu de *ms.* lisez *mss.*

Pag. 31, lig. 2, en remontant, 2ᵉ col. au lieu de *fol. 23 vᵒ.* lisez *fol. 22 vᵒ.*

Pag. 33, lig. 22, au lieu de *au faible essai d'un calcul, comme*, lisez *à un faible essai d'un calcul de ce genre, comme.*

Pag. 36, lig. 12. Le signe de fonction *f* n'étant pas bien venu dans le tirage des bonnes feuilles, ressemble ici, et plusieurs fois dans la suite, à un signe d'intégration. Je dois en prévenir le lecteur, pour lui éviter des méprises.

Pag. 56, lig. 11, au lieu de *la différence*, lisez *l'excès.*

Pag. 62, lig. 3, en remontant, 2ᵉ col. au lieu de *de ce recueil*, lisez *du recueil.*

Pag. 64, lig. 1, en remontant, 1ʳᵉ col. au lieu de يحى, lisez كحى (*sic*).

Pag. 65, lig. 1, en remontant, 1ʳᵉ col. au lieu de *Alkayyâmi*, lisez *Alkhayyâmi.*

Pag. 78, lig. 1, en remontant, au lieu de *ou y quelconque*, lisez *et y quelconque.*

Pag. 80, probl. 44, 1ʳᵉ équation, et probl. 45, 1ʳᵉ ligne, au lieu de $\frac{2}{8}$ lisez $\frac{2}{5}$.

Pour rester conforme au mode de transcription que j'ai adopté pour les mots orientaux, à savoir de rendre ق par *k* et ك par *q*, je prie de lire, dans tout le cours de l'ouvrage, *Alqarkhi* au lieu de *Alkarkhi*, et sur le titre, *Aboû Beqr* au lieu de *Aboû Bekr.*

